Machine Translated by Google

ΑΝΩΜΑΛΕΣ ΒΑΡΟΣ-ΕΝΟΣ ΣΕΙΡΑ EISENSTEIN ΚΑΙ EULER ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΧΑΒΙΕΡ ΠΟΛΟ ΚΑΙ ΟΣΚΑΡ ΡΙΒΕΡΟ*

Περίληψη. Έστω f = E1(χ1, χ2) μια ακανόνιστη σειρά Eisenstein βάρους ένα, δηλαδή, με
χ1(p) = χ2(p), και θεωρήστε την γενικά τυχαιοποιημένη συνηθισμένη οικογένεια που διέρχεται από αυτήν.
Όταν χ1, χ2 και χ1χ $_2^{-1}$ είναι πρωτόγονα του ίδιου αγωγού, δείχνουμε ότι η εξειδίκευση-
ση στο f της p-αδικής L-συνάρτησης με modular-συμβόλαιο αυτής της οικογένειας, με περιόδους που λαμβάνονται στο
συνομολογία των συμπυκνωμένων αρθρωτών καμπυλών, παράγοντες ως γινόμενο δύο Kubota-Leopoldt
p-αδικές L-συναρτήσεις που συνδέονται με χ1 και χ2. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν μιγαδικές κρίσιμες τιμές στο βάρος
πρώτον, η παραγοντοποίηση λαμβάνεται απευθείας από την συνομολογική κατασκευή: υπολογίζουμε
το ήμερο-στριμμένο modular μέτρο μέσω του εντοπισμένου χάρτη Sharifi και της ρητής αμοιβαιότητας, και δείξτε ότι η ήμερη
στρίψη προσδιορίζει τις συμπαγείς modules περιόδου στο βάρος ένα.
Αυτό δίνει ένα ανάλογο βάρους-ένα της παραγοντοποίησης του Bella¨ıche-Dasgupta για κρίσιμη κλίση
Σειρές Eisenstein. Ως εφαρμογές, και υπό ρητές υποθέσεις εξειδίκευσης, συγκρίνουμε
Κλάσεις Kato με κυκλικές μονάδες, κλάσεις Heegner με ελλειπτικές μονάδες και διαγώνιοι κύκλοι με
Ο Κάτο ολοκληρώνει δύο διαδοχικές εκφυλίσεις του Αϊζενστάιν. Συζητάμε επίσης το απόσπασμα.
από συμπαγείς έως ανοιχτές περιόδους, και περιλαμβάνουν μια έκθεση της συμφωνίας και της εκφύλισης
μεθόδους στις οποίες βασίζονται αυτές οι συγκρίσεις.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή 2. 1
Προκαταρκτικά 3. 6
Συνέπειες Eisenstein και πλέγματα Galois 4. Εκφύλιση Eisenstein 9
σε οικογένειες 5. Κυκλικές μονάδες και στοιχεία Kato 12
6. Παραγοντοποίηση Artin και συμπαγείς περίοδοι 15
7. Κύκλοι Heegner και ελλειπτικές μονάδες 8. Διπλή εκφύλιση 23
Eisenstein Αναφορές 37
44
50

arXiv:2511.17210v1

1. Εισαγωγή

Η αποσύνθεση μιας αναπαράστασης Eisenstein Galois σε χαρακτήρες υποδηλώνει μια αντίστοιχη παραγοντοποίηση της p-αδικής L-συνάρτησής της σε p-αδικές L-συναρτήσεις Dirichlet.
Σημείο Eisenstein που βρίσκεται σε μια γενικά κυστιδική οικογένεια, η συνάρτηση που εξετάζουμε λαμβάνεται εξειδικεύοντας ένα μέτρο αρθρωτού συμβόλου σε αυτήν την οικογένεια, με περιόδους που επιλέγονται σε μια συνομολογική υλοποίηση· η τιμή του στο σημείο Eisenstein εξαρτάται επομένως από αυτές τις περιόδους, και το Η αναμενόμενη παραγοντοποίηση δεν χρειάζεται να προκύπτει από την παρεμβολή σύνθετων τιμών. Σε ένα πρωτόγονο ρύθμιση κοινού αγωγού, αποδεικνύουμε ότι, όταν οι περίοδοι λαμβάνονται στη συνομολογία του οι συμπυκνωμένες αρθρωτές καμπύλες, η εξειδίκευση αυτού του μέτρου σε ένα ακανόνιστο βάρος-ένα Το σημείο Eisenstein E1(χ1, χ2) είναι μη μηδενικό και παραγοντοποιείται ως γινόμενο δύο p-αδικών διαστάσεων Kubota-Leopoldt L-συναρτήσεις που συνδέονται με χ1 και χ2, και στη συνέχεια μελετάμε τις συνέπειες για τα συστήματα Euler.

Ημερομηνία: 13 Νοεμβρίου 2026.
Ταξινόμηση Μαθηματικών 2020. 11R23; 11F85.

Machine Translated by Google

Το κύριο αποτέλεσμά μας μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ανάλογο βάρους-ένα της παραγοντοποίησης που καθιερώθηκε από τους Bella¨iche-Dasgupta [BD15, Θεώρημα 1.1]. Για μια σειρά Eisenstein κρίσιμης κλίσης με βάρος τουλάχιστον δύο, ο τύπος τους εκφράζει την p-αδική L-συνάρτηση, στην κατάλληλη συνιστώσα πρόσημου, ως το γινόμενο δύο p-αδικών L-συναρτήσεων Dirichlet και ενός σαφούς κυκλοτομικού λογαρίθμου. Εδώ εξετάζουμε μια συνηθισμένη σειρά Eisenstein βάρους ένα της οποίας οι δύο ρίζες Hecke στο p συμπίπτουν, δηλαδή, μια ακανόνιστη σειρά. Δεδομένου ότι το βάρος ένα δεν έχει μιγαδικούς κρίσιμους ακέραιους, πρέπει να λάβουμε την παραγοντοποίηση από την κατασκευή modular-συμβόλου σε οικογένειες.

Το σημείο εκκίνησής μας είναι η εργασία των Shih–Wang [SW21, SW22] σχετικά με την εξαιρετική περίπτωση της εικασίας του Sharifi, της οποίας η παραγοντοποίηση αφορά μια σειρά Eisenstein με βάρος ένα με ένα τετριμμένο συστατικό και χρησιμοποιεί μια ολοκληρωτική υπόθεση Gorenstein για την επιλογή περιόδων. Αντ' αυτού, εργαζόμαστε με την συνομολογία των συμπυκνωμένων αρθρωτών καμπυλών στο χαρακτηριστικό μηδέν, όπου η τοπική ελευθερία προκύπτει από την Betina–Dimitrov–Pozzi, και περνάμε σε δύο μη τετριμμένα συστατικά μέσω ήπιας στρέψης. Αυτό απαιτεί έλεγχο της αντιστοιχίας στρέψης στις ενότητες περιόδου, συμπεριλαμβανομένης της μη μηδενικής της στο σημείο Eisenstein, την οποία καθιερώνουμε αξιολογώντας τα στριμμένα αρθρωτά σύμβολα μέσω τοπικής αμοιβαιότητας. Ο ίδιος υπολογισμός δίνει έτσι τους δύο παράγοντες Dirichlet και τη μη μηδενική αξία που απαιτείται για τον προσδιορισμό των συμπαγών περιόδων με βάρος ένα.

Μια σχετική παραγοντοποίηση συμβαίνει για τις p-αδικές L-συναρτήσεις Katz που περιορίζονται στην κυκλοτομική γραμμή: στην περίπτωση CM, [SW22, Πόρισμα 2.3] συνδέει την αρθρωτή p-αδική L-συνάρτηση με την p-αδική L-συνάρτηση Katz και τον τύπο του Gross. Το αποτέλεσμα κοινού αγωγού μας αντιμετωπίζει ένα διαφορετικό εύρος, όπου και τα δύο συστατικά είναι μη τετριμμένα. Γενικότερα, η σύγκριση των συστημάτων Euler ως τρόπος απόδειξης περιπτώσεων p-αδικού φορμαλισμού Artin είναι επίσης κεντρική στην παραγοντοποίηση της p-αδικής L-συνάρτησης Rankin ενός τενσορικού τετραγώνου από τον Dasgupta [Das16].

Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τις κλάσεις Kato με κυκλικές μονάδες και εξετάζουμε ανάλογα ερωτήματα για τις κλάσεις Heegner και για δύο διαδοχικές εκφυλίσεις Eisenstein διαγώνιων κύκλων. Σε κάθε περίπτωση, οι αναλυτικές παραγοντοποιήσεις υποδεικνύουν ποια συστήματα Euler θα πρέπει να εμφανιστούν μετά την εξειδίκευση. Για να συγκρίνουμε τις ίδιες τις κλάσεις, χρειαζόμαστε επίσης τακτική εξειδίκευση στην επιλεγμένη συνομολογική υλοποίηση και μια ορισμένη συμβατότητα με τις τοπικές συνθήκες, τις οποίες δηλώνουμε ως σαφείς υποθέσεις.

1.1. Η παραγοντοποίηση βάρους-ένα. Έστω f = E1(χ1, χ2), με χ1 άρτιο και χ2 περιττό, και υποθέτοντας ότι η f είναι ακανόνιστη στο p, δηλαδή, χ1(p) = χ2(p). γράφουμε α για αυτήν την κοινή τιμή. Δεδομένου ότι οι δύο ρίζες του πολυωνύμου Hecke στο p συμπίπτουν, η f έχει μια μοναδική συνηθισμένη p-σταθεροποίηση, την οποία εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με f. Η αναπαράσταση Galois της f είναι το άθροισμα των δύο χαρακτήρων χ1 και χ2, και γι' αυτό αναμένεται ότι η p-αδική L-συνάρτησή της θα περιλαμβάνει δύο παράγοντες Dirichlet.
Η γεωμετρία του [BDP22] δίνει έναν γενικά κυστιδιακό συνηθισμένο κλάδο μέσω του f, ´etale ως προς τον χώρο βάρους· γράφουμε f για την οικογένεια και A = L[[X]] για τον ολοκληρωμένο τοπικό δακτύλιο της, με X = 0 σε βάρος ένα.

Οι περίοδοι στον τύπο μας προέρχονται από τη συνηθισμένη συνομολογία κατά μήκος του πύργου των συμπυκνωμένων αρθρωτών καμπυλών: το προσημμένο πηλίκο χωρίς στρέψη, επί του οποίου ενεργούν οι τελεστές Hecke μέσω των ιδιοτιμών του f, είναι ένα ελεύθερο A-μοντέλο βαθμού ένα, που συμβολίζεται με Pf,cpt. Τα συνηθισμένα αρθρωτά σύμβολα ορίζουν ένα μέτρο με τιμές σε αυτό το μοντέλο, και η επιλογή μιας βάσης γf δίνει ένα βαθμωτό μέτρο στην οικογένεια, του οποίου την εξειδίκευση στο βάρος ένα συμβολίζουμε με L cpt (f). Αναφερόμαστε σε αυτό ως κανονικοποίηση συμπαγούς περιόδου, όπου το cpt αναφέρεται στην συμπυκνωμένη αρθρωτή καμπύλη. Το ακριβές πηλίκο, το μέτρο και ο τύπος παρεμβολής σε κλασικά σημεία κυστιδίων δίνονται στην §6.2.

Για z Z × π , Γράψτε z = ω(z) z , με ω τον χαρακτήρα Teichmüller. Στην τετριμμένη συνιστώσα του, (β, s) για την

Το L_p^{cpt} (f, j) είναι η αξιολόγηση στο z z j KL . Χρησιμοποιούμε το L π τυπική συνάρτηση Kubota-Leopoldt ενός άρτιου χαρακτήρα Dirichlet β. Το Θεώρημα 6.3 και το Πόρισμα 6.5 δίνουν τον ακόλουθο τύπο.

Machine Translated by Google

Θεώρημα Α. Υποθέστε ότι χ1, χ2 και χ1χ ότι p 5 και p 2 1 είναι πρωτόγονες του ίδιου αγωγού M > 1, Mφ(M), και ότι χ1(p) = χ2(p). Τότε

L cpt π (f, j) = Cf,γ M jL KL (χ1, 1 + j)L+H σταθερά είναι π (χ 2 ω, 1 j), Cf,γ L ×.

ανεξάρτητη από το j και το προκύπτον φραγμένο μέτρο είναι μη μηδενικό. Η κανονικοποίηση της καθορίζεται από την επιλεγμένη συμπαγή περίοδο.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα, γράφουμε f = f0 η, όπου η = χ1 και f0 = E1(1, χ2χ 1 1). Η αντιστοιχία συστροφής δίνει μια κανονική απεικόνιση από την ενότητα συμπαγούς περιόδου της f σε αυτήν της βοηθητικής οικογένειας f0. Υπολογίζουμε το μέτρο εικόνας χρησιμοποιώντας τον εντοπισμένο χάρτη Sharifi, ο οποίος στέλνει τα σύμβολά του σε κυπελλοειδή γινόμενα κυκλοτομικών μονάδων. Η ρητή αμοιβαιότητα εκφράζει τις τοπικές αναλλοίωτες μεταβλητές τους ως ίχνη: ο λογάριθμος της πρώτης καταχώρησης δίνει έναν παράγοντα Dirichlet, και τα συζυγή της λογαριθμικής παραγώγου Coleman της δεύτερης δίνουν τον άλλο.
Η μη μηδενική εμφάνιση του προκύπτοντος γινομένου δείχνει ότι ο χάρτης στρέψης είναι ένας ισομορφισμός στην ίνα βάρους-ένα, άρα και στον τοπικό δακτύλιο βαρών, και μας επιτρέπει να ανακτήσουμε την παραγοντοποίηση στις συμπαγείς περιόδους της f.

Το ανακλώμενο επιχείρημα και ο συντελεστής αγωγού μπορούν επίσης να γίνουν κατανοητά από την άποψη του άποψη του σύνθετου φορμαλισμού Artin. Για έναν άρτιο χαρακτήρα πεπερασμένης τάξης, το ρ του αγωγού ρ έχει ρ , ένας

L(f ρ 1 , s) = L(χ1ρ 1 , s)L(χ2ρ 1 , ς).

Εφαρμόζοντας την συναρτησιακή εξίσωση στον δεύτερο παράγοντα στο s = 1, αντικαθίσταται από μια τιμή L(χ); ο πρώτος παράγοντας ακυρώνει την συνήθη 1 ισοτιμία 1 συμβάλλει χ2(p) rρ(M) 1 τM(χ2)τp r (ρ) και το 1 2ρ, θ. Το άθροισμα του Gauss τουχ2ρ ρ , άγριο άθροισμα Gauss ακυρώνει αυτό στο in-

ορίσματος, έτσι ώστε μόνο ρ(M) j στο θεώρημα. 1 επιβιώνει. Αυτό εξηγεί το M j και τον τύπο τριπολισμού
Ο πρώτος παράγοντας, στο s = 1 με άρτιο χαρακτήρα, αναπαρίσταται p-αδικά από τον λογαριθμικό τύπο του Leopoldt. Αυτή η ευρετική εξηγεί το σχήμα του τύπου, αν και η απόδειξη πρέπει να προχωρήσει μέσω τοπικής αμοιβαιότητας, καθώς η μιγαδική παρεμβολή δεν είναι διαθέσιμη στο βάρος ένα.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε M = 19, p = 83 και έναν χαρακτήρα ϑ modulo 19 με ϑ(2) = ζ18. Το ζεύγος στο 83, και η (χ1, χ2) = (θ) ο λόγος 2 , Το ϑ5) ικανοποιεί τις υποθέσεις: και οι δύο χαρακτήρες λαμβάνουν την τιμή ζ 12 18 /= 1 τους, σε αυτό είναι πρωτόγονος. Δεδομένου ότι το ζ 12 18 το παράδειγμα ικανοποιεί επίσης την πρόσθετη συνθήκη α/= 1.

απαιτείται στο Πόρισμα Β παρακάτω. Επιστρέφουμε σε αυτά τα δεδομένα στο Παράδειγμα 7.9.

Η εμφάνιση λογαρίθμων μονάδων συνδέει επίσης αυτό το αποτέλεσμα με τις συγκρίσεις βάρους-ενός των Darmon–Lauder–Rotger [DLR17] και Rivero–Rotger [RR19], όπου οι λογαριθμικοί ρυθμιστές περιγράφουν εξειδικεύσεις ή παραμορφώσεις των κλάσεων του συστήματος Euler. Στο περιβάλλον μας, ο πρώτος παράγοντας Kubota–Leopoldt προκύπτει από ένα άθροισμα λογαρίθμων κυκλοτομικών μονάδων στην αξιολόγηση του συμπαγούς μέτρου αρθρωτού συμβόλου.

1.2. Κλάσεις Kato και κυκλικές μονάδες. Η παραγοντοποίηση του Θεωρήματος Α υποδηλώνει μια αντίστοιχη σχέση μεταξύ των συστημάτων Euler. Υπενθυμίζεται ότι οι κλάσεις Kato συνδέονται με μορφές ακμής, ενώ οι κυκλικές μονάδες συνδέονται με χαρακτήρες Dirichlet. Όταν μια οικογένεια ακμής διέρχεται από ένα σημείο Eisenstein, η αναπαράστασή της κατά Galois γίνεται αναγώγιμη και είναι φυσικό να αναρωτηθούμε εάν η εξειδίκευση της κλάσης Kato μπορεί να εκφραστεί με όρους κυκλικών μονάδων.
Η Ενότητα 5 προσεγγίζει αυτό το ζήτημα από την οπτική γωνία των συστημάτων Euler, ακολουθώντας τη σύγκριση κρίσιμης κλίσης του [PR25].

Γράψτε κ(f)χ1 για την χ1-συνιστώσα της εξειδικευμένης κλάσης Kato και c(χ1) για την κλάση κυκλικής μονάδας. Στην συνομολογική κανονικοποίηση που χρησιμοποιείται για τη σύγκρισή τους, και οι δύο έχουν συντελεστές στην κυκλοτομική παραμόρφωση της θεωρίας L(χ). 1 1)(1): η διπλή ερμηνεία και η παραλλαγή του Tate είναι του Kummer
Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, η άλλη χαρακτηριστική συνιστώσα μηδενίζεται σε άρτιες κυκλοτομικές συνιστώσες για λόγους ισοτιμίας. Η σύγκριση υποδηλώνεται από τους ρητούς νόμους αμοιβαιότητας: ο ρυθμιστής της κυκλικής μονάδας δίνει τον πρώτο παράγοντα Kubota-Leopoldt στο Θεώρημα Α, και η ακύρωση αυτού του παράγοντα θα πρέπει να αφήσει τον δεύτερο ως τον συντελεστή του c(χ1).

Machine Translated by Google

Η επιλογή των περιόδων έχει σημασία εδώ, καθώς το Θεώρημα Α χρησιμοποιεί συμπαγείς περιόδους, ενώ ο νόμος αμοιβαιότητας του Kato χρησιμοποιεί αυτές της κατασκευής του συστήματος Euler, και η σύγκρισή τους μπορεί να εισαγάγει ένα μηδέν στο σημείο Eisenstein. Η ομαλοποίηση του [PR25] συνεισφέρει επίσης μια βοηθητική τιμή L και έναν συζυγή παράγοντα. Η στρατηγική μας είναι να διατηρήσουμε αυτούς τους παράγοντες που εξαρτώνται από το βάρος μαζί: εάν η κλάση και ο ρυθμιστής της ειδικεύονται τακτικά, η μη μηδενική εξίσωση του συμπαγούς μέτρου στο Θεώρημα Α αναγκάζει τη συνδυασμένη συμβολή τους να είναι κανονική.

Η Υπόθεση 5.9 καθορίζει την απαιτούμενη κανονική εξειδίκευση: η οικογενειακή κλάση επεκτείνεται στην επιλεγμένη υλοποίηση διαίρεσης και ο συνηθισμένος ρυθμιστής της γίνεται ο χάρτης Coleman κυκλικής μονάδας, με τον δηλωμένο συντελεστή συντεταγμένων. Έστω Df (j) ο συνδυασμένος συντελεστής βάρους στο f, μαζί με τους ήπιους παράγοντες Euler και συντεταγμένων. Η έκφρασή της δίνεται στην (6.14).

Πόρισμα Β. Υποθέστε τις υποθέσεις του Θεωρήματος Α, ότι α≠ 1, και της Υπόθεσης 5.9. Σχετικά με την τετριμμένη συνιστώσα Teichmuller,

$$\kappa(f)\chi 1 = Df(j) \quad M \qquad jL\ KL(\chi\ 2_{\mu}\omega, \quad j)c(\chi 1)$$

πάνω από το κλασματικό πεδίο της κυκλοτομικής άλγεβρας κατανομής. Εάν ο συντελεστής είναι αναλυτικός, η ισότητα ισχύει στην καθολική συνομολογία. Ο παράγοντας σύγκρισης που ορίζει το Df είναι κανονικός σε βάρος, αλλά η τιμή του μπορεί να είναι μηδέν, και κ(f)χ1≠ 0 αν και μόνο αν αυτή η τιμή είναι μη μηδενική.

Επομένως, η δεύτερη p-αδική L-συνάρτηση του Dirichlet δίνει τον συντελεστή της κλάσης κυκλικών μονάδων, μέχρι τους παράγοντες που εμφανίζονται στους δύο νόμους αμοιβαιότητας. Το πέρασμα από τους ρυθμιστές στις καθολικές κλάσεις χρησιμοποιεί το θεώρημα Leopoldt για τα αβελιανά πεδία, όπως εξηγείται στην Πρόταση 5.6. Η Ενότητα 5 καθορίζει τη σύγκριση πριν από την αξιολόγηση του αναλυτικού συντελεστή της. Η §6.6 στη συνέχεια συνάγει το Πόρισμα Β από το Θεώρημα Α.

Οι συγκρίσεις κρίσιμης κλίσης των Loeffler-Rivero [LR24] και Polo-Rivero [PR25] παρέχουν το μοντέλο για αυτή τη χρήση συνομολογικών υλοποιήσεων και κρυσταλλικών περιόδων. Μελετάμε επίσης τον ίδιο τον χάρτη περιόδων και δείχνουμε ότι για την υλοποίηση Drinfeld-Manin της βοηθητικής οικογένειας f0 έχει ένα απλό μηδέν, έτσι ώστε να φέρει μια μη μηδενική συμπαγή τιμή σε μια πρώτη παράγωγο στην κατεύθυνση του βάρους. Η Ερώτηση 6.9 ζητά την αντίστοιχη σύγκριση με την υλοποίηση που επιλέχθηκε από τις περιόδους του Kato.

1.3. Κλάσεις Heegner και ελλειπτικές μονάδες. Αφού εξετάσουμε κυκλικές μονάδες πάνω από το Q, στρεφόμαστε στις ελλειπτικές μονάδες πάνω από ένα φανταστικό τετραγωνικό πεδίο και τη σχέση τους με τις κλάσεις Heegner. Αυτή η αντικυκλοτομική σύγκριση έχει ένα απλούστερο σημείο εκκίνησης: η γεωμετρία τοποθετεί τον εντοπισμό μιας κλάσης Heegner στη θετική συνήθη κατεύθυνση, έτσι ώστε η εικόνα της στο φυσικό πηλίκο κατάταξης ένα να είναι μηδέν πριν χρησιμοποιηθεί οποιαδήποτε παραγοντοποίηση των p-αδικών L-συναρτήσεων, και μπορούμε να εργαστούμε απευθείας με τον θετικό ρυθμιστή όπως στο [LR24, §C3].

Εδώ η f = E1(χ1, χ2) είναι μια ακανόνιστη σειρά Eisenstein όπως στην §1.1. Αυτή η σύγκριση δεν χρησιμοποιεί το Θεώρημα Α, και η διαιρεμένη υλοποίηση που απαιτεί είναι μέρος των υποθέσεων της Ενότητας 7.
Έστω K ένα φανταστικό τετραγωνικό πεδίο στο οποίο το p και κάθε πρώτος αριθμός του ήπιου επιπέδου διαιρούνται.

Η κατασκευή του [JLZ21], με τις υποθέσεις των συστροφών και της εξειδίκευσης στην Ενότητα 7, δίνει μια κλάση κ(f, K) που μεταβάλλεται σε αντικυκλοτομικούς χαρακτήρες. Τα δύο συστατικά Eisenstein δίνουν ενότητες συντελεστών τάξης ένα V με ελλειπτικές κλάσεις μονάδων ui . Οι τοπικοί ρυθμιστές τους είναι οι συναρτήσεις i , Katz Li.
ac

, για i = 1, 2.

Υπό την συμβατότητα παρεμβολής της Υπόθεσης 7.3, η σύγκριση BDP–Katz δίνει

$$_{\text{μεγάλο}}{}^{2}_{\text{ΑΕΠ}} = A(f, K)L1L2, \text{ όπου το}$$

A(f, K) καταγράφει τους παράγοντες Euler και περιόδου. Επομένως, σχηματίζουμε u(f, K) =

$$vf,\chi 1 \quad L2u1 + vf,\chi 2 \quad L1u2.$$

Κάθε κλάση ελλειπτικών μονάδων σταθμίζεται έτσι από τη συνάρτηση Katz του άλλου συστατικού. Σύμφωνα με την τοπική συμβατότητα της §7.4, αυτός ο συνδυασμός ικανοποιεί την τοπική συνθήκη Heegner και μπορεί να συγκριθεί με την γεωμετρική κλάση.

Machine Translated by Google

Θεώρημα Γ. Υποθέστε τις Υποθέσεις 7.1 και 7.3, και την Υπόθεση 7.6. Εάν η ενότητα Heegner Selmer είναι απαλλαγμένη από στρέψη τάξης ένα και ο θετικός ρυθμιστής της είναι μη μηδενικός, τότε

$$A(f, K)\, u(f, K) = \Omega_{f,\gamma}\, \mathrm{LBDP}\, \kappa(f, K) \text{ μετά την επέκταση}$$

στο πεδίο κλασμάτων της αντικυκλοτομικής άλγεβρας κατανομής. Εάν το A(f, K) είναι αναλυτικό και και οι δύο κλάσεις ανήκουν στη δηλωμένη ενότητα Selmer, η ισότητα ισχύει σε αυτήν την ενότητα.

Εδώ, το Ωf,γ είναι η περίοδος στον νόμο αμοιβαιότητας Heegner. Ο επιπλέον παράγοντας BDP προέρχεται από τη σύγκριση του ρυθμιστή της κλάσης Heegner, η οποία δίνει το LBDP, με αυτόν της κλάσης βαρυμένων ελλειπτικών μονάδων, η οποία δίνει το τετράγωνό της. Και οι δύο χαρακτήρες αθροίσματος διατηρούνται σε αυτήν τη σύγκριση.

1.4. Διπλή εκφύλιση Eisenstein. Τέλος, διερευνούμε πώς συμπεριφέρονται αυτές οι συγκρίσεις υπό δύο διαδοχικές εξειδικεύσεις Eisenstein στην κατασκευή διαγώνιου κύκλου, διατηρώντας την τρίτη αρθρωτή οικογένεια cupsidal. Η πρώτη εξειδίκευση οδηγεί σε δύο συνιστώσες Beilinson-Flach και η δεύτερη σε τέσσερις συνιστώσες Kato, καθεμία πολλαπλασιασμένη στο αντίστοιχο στάδιο με την p-αδική L-συνάρτηση του συμπληρωματικού της συστατικού.

Έστω f, g και h τρεις συνηθισμένες οικογένειες. Για αυτή τη σύγκριση, και σε όλη την Ενότητα 8, Χρησιμοποιούμε f και h για τα δύο σημεία Eisenstein:

$$f \times_f f = f = E_1(1, \varepsilon_K), \text{ όπου το } h \times_h h = h = E_1(\psi_1, \psi_2),$$

K είναι φανταστικό τετραγωνικό, το εK είναι ο τετραγωνικός χαρακτήρας του και το p διασπάται στο K. Και τα δύο σημεία είναι ακανόνιστα: για το f αυτό προκύπτει από το εK(p) = 1, αφού το p διασπάται στο K. Θεωρούμε το f ως την οικογένεια CM μέσω του f, ενώ το h είναι ένα ακανόνιστο σημείο βάρους-ένα του h, και το g παραμένει ακανθώδες. Αν και τα δύο σημεία παίζουν παράλληλους ρόλους στις διαδοχικές αναλύσεις της αναπαράστασης των συντελεστών, οι συγκρίσεις που χρησιμοποιούνται σε κάθε βήμα είναι διαφορετικές: το πρώτο χρησιμοποιεί την κατασκευή CM του [AOPR26] και το δεύτερο χρησιμοποιεί τη σύγκριση Beilinson-Flach/Kato του [BDV22], με τις απαιτήσεις εξειδίκευσης και τοπικής συμβατότητας της Πρότασης 8.4.

Τα βάρη προέρχονται από δύο αναλυτικές παραγοντοποιήσεις: πρώτον, το τετράγωνο της p-αδικής L-συνάρτησης Lg, η οποία είναι το κυρίαρχο τριπλό γινόμενο, παραγοντοποιεί σε δύο συναρτήσεις Hida-Rankin και στη συνέχεια καθεμία από αυτές παραγοντοποιεί σε δύο συναρτήσεις Mazur-Kitagawa. Πολλαπλασιάζοντας και στα δύο στάδια κάθε κλάση με τη συνάρτηση του συμπληρωματικού της συστατικού, λαμβάνουμε το άθροισμα BK(2)(f, g, h) του Ορισμού 8.5.

Θεώρημα Δ. Σύμφωνα με τις υποθέσεις εξειδίκευσης και Selmer του Θεωρήματος 8.7, και με τις συμβατές περιόδους που ορίζονται εκεί, έχουμε

$$\lambda_{N_g}(g)\, A_h\, \mathrm{BK}(2)(f, g, h) = \Omega_f \Omega_h\, L_{\overline{g}}(f, g, h)\, \kappa(f, \overline{g}, h).$$

Η ισότητα ισχύει για το κλασματικό πεδίο του δακτυλίου συντελεστών της υπόλοιπης οικογένειας g.

Εδώ, τα Ωf και Ωh είναι οι περίοδοι των δύο εξειδικεύσεων, που ορίζονται στις §8.2 και §8.3, αντίστοιχα. Ο παράγοντας λNg (g) είναι η ψευδο-ιδιοτιμή Atkin-Lehner που αναφέρεται στην §8.2, και το Ah περιέχει τους παράγοντες Euler και κανονικοποίησης της δεύτερης σύγκρισης.

Για να πραγματοποιήσουμε και τις δύο εξειδικεύσεις, απαιτούμε μια τακτική επέκταση σε xh των κλάσεων και των νόμων αμοιβαιότητας του πρώτου σταδίου. Στο δεύτερο βήμα, το [BDV22] παρέχει την τοπική σύγκριση στη ρύθμιση CM, ενώ για ένα γενικό h η δηλωμένη συμβατότητα παραμένει μια είσοδος. Συγκεκριμένα, ο τύπος αφορά την υποδεικνυόμενη σειρά εξειδίκευσης. Οι σχετικές κατασκευές των κλάσεων Heegner του Castell`a–Do [CD23] παρέχουν περαιτέρω κίνητρο για αυτήν την εικόνα.

1.5. Οργάνωση του άρθρου. Η Ενότητα 2 καθορίζει τις συμβάσεις σχετικά με τις αναπαραστάσεις Galois και τις κυκλοτομικές μεταβλητές. Οι Ενότητες 3–4 είναι ως επί το πλείστον επεξηγηματικές: συγκρίνουν τις συμφωνίες Eisenstein με την εκφύλιση στις οικογένειες, δίνοντας έμφαση στον ρόλο του ορίου στις συνομολογικές πραγματοποιήσεις. Στη συνέχεια, προχωράμε στην κύρια σύγκριση. Η Ενότητα 5 αφορά

Machine Translated by Google

Κλάσεις Kato με κυκλικές μονάδες, αρχικά με έναν μη απλοποιημένο αναλυτικό συντελεστή, και η Ενότητα 6 αποδεικνύει την συμπαγή παραγοντοποίηση του Θεωρήματος Α και τη χρησιμοποιεί για να υπολογίσει το Πόρισμα Β στο πλαίσιο κοινού αγωγού, χωρίς την απλή υπόθεση μηδενισμού της Ενότητας 5. Η Ενότητα 7 συζητά το αντικυκλοτομικό αντίστοιχο, όπου η τοπική συνθήκη Heegner δίνει άμεσα τη μηδενική τιμή του πηλίκου. Τέλος, η Ενότητα 8 εφαρμόζει την ίδια διαδικασία στάθμισης σε δύο διαδοχικές εξειδικεύσεις Eisenstein.

Ορισμένα ερωτήματα παραμένουν ανοιχτά. Από αριθμητική άποψη, τα κυριότερα είναι η κανονική μεταφορά της κλάσης Kato και του ρυθμιστή της στην διαιρεμένη υλοποίηση, και η μη μηδενική εξάλειψη του συνδυασμένου παράγοντα σύγκρισης στο Πόρισμα Β. Η σύγκριση μεταξύ συμπαγών και Kato περιόδων θα βοηθούσε στον προσδιορισμό του τελευταίου, αν και στην κανονικοποίηση που χρησιμοποιείται εδώ οι τάξεις των βοηθητικών και των συζυγών παραγόντων παίζουν επίσης ρόλο. Θα ήταν επίσης ενδιαφέρον να επεκταθεί το Θεώρημα Α σε χαρακτήρες διαφορετικών αγωγών, κάτι που θα απαιτούσε τους αντίστοιχους τοπικούς υπολογισμούς Fourier και Euler.

1.6. Ευχαριστίες. Ευχαριστούμε τον Ra´ul Alonso για τις χρήσιμες συζητήσεις σχετικά με το θέμα αυτού του άρθρου. Κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας αυτού του άρθρου, οι συγγραφείς υποστηρίχθηκαν από το PID2023-148398NA-I00, το οποίο χρηματοδοτήθηκε από το MCIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE.

1.7. Χρήση της Τεχνητής Νοημοσύνης. Αυτό το έργο ξεκίνησε το 2025, πριν αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε εργαλεία Τεχνητής Νοημοσύνης στην μαθηματική μας έρευνα. Συγκεκριμένα, η ιδέα της εφαρμογής των αποτελεσμάτων του Shih-Wang για την απόκτηση του τύπου παραγοντοποίησης προηγείται της χρήσης αυτών των εργαλείων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήσαμε τα γλωσσικά μοντέλα GPT-6 Astra (OpenAI) και Claude Opus 5.5 (Anthropic) κυρίως για να διευκρινίσουμε την αιτιολόγηση της ήμερης συστροφής μεταξύ των δύο οικογενειών στην Ενότητα 6 και τη σύγκριση περιόδων που προκύπτουν από την ανοιχτή και συμπυκνωμένη συνομολογία. Χρησιμοποιήσαμε επίσης αυτά τα μοντέλα για να βελτιώσουμε την παρουσίαση και να ξαναγράψουμε μέρη της εργασίας, να αναπτύξουμε συγκεκριμένα παραδείγματα (όπως το Παράδειγμα 7.9, τα οποία έχουμε επαληθεύσει ανεξάρτητα) και να εντοπίσουμε σφάλματα και ανακρίβειες σε προηγούμενα προσχέδια. Όλες οι μαθηματικές δηλώσεις και αποδείξεις έχουν ελεγχθεί από τους συγγραφείς, οι οποίοι αναλαμβάνουν πλήρως την ευθύνη για το περιεχόμενο αυτού του άρθρου.

2. Προκαταρκτικά

Διορθώνουμε τις συμβάσεις για τις αναπαραστάσεις Galois, τις οικογένειες μονάδων και τις περιόδους. Οι κατασκευές του συστήματος Euler χρησιμοποιούν την κοομολογία της ανοιχτής καμπύλης μονάδων Y1, ενώ οι περίοδοι στην Ενότητα 6 προέρχονται από την συμπύκνωσή της X1. Οι γενικοί κυστειδικοί ιδιοχώροι τους συμφωνούν, αλλά τα ολοκληρωτικά ή συνεκτικά πηλίκα τους μπορεί να διαφέρουν σε ένα σημείο Eisenstein.

Έστω p 5 ένας πρώτος αριθμός. Διορθώνουμε τις

$$\text{ενσωματώσεις } ιp : Q \quad Qp\text{ι}, \quad : Q \quad C.$$

Η δεύτερη ενσωμάτωση καθορίζει μια σύνθετη σύζευξη c GQ. Εκτός εάν αναφέρεται ρητά διαφορετικά, το L(χ) αντιπροσωπεύει τον χαρακτήρα Galois με αριθμητική τιμή Frobenius χ(q), και ο κυκλοτομικός χαρακτήρας ε ικανοποιεί την ε(Frq) = q. Δεδομένου ότι τα [LR24, PR25] χρησιμοποιούν αντ' αυτού τη γεωμετρική σύμβαση Frobenius, καταγράφουμε τη μετάφραση μεταξύ και των δύο συμβάσεων στην §4.1. Ως συνήθως, εάν το L/Qp είναι μια πεπερασμένη επέκταση, γράφουμε OL για τον δακτύλιο των ακεραίων του. όταν δεν μπορεί να προκύψει σύγχυση, απλώς γράφουμε O.

2.1. Αναπαραστάσεις Galois των αρθρωτών μορφών. Έστω

$$\xi = \sum_{n \quad 1} an(\xi)q^n \quad Sk(N\xi, \chi\xi)$$

να είναι μια κανονικοποιημένη νέα μορφή βάρους k 2. Μετά τη μεγέθυνση του L έτσι ώστε να περιέχει το πεδίο Hecke του, η γεωμετρική υλοποίηση που χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία είναι η δισδιάστατη L-αναπαράσταση Vξ που λαμβάνεται από το μέγιστο ξ-ισοτυπικό πηλίκο της (2.1)

$$H^1_{et}\, Y1(N\xi)Q\,,\, L\bar{k} \quad 2(1) \quad Zp\ L.$$

Machine Translated by Google

Εδώ, το Lk 2 είναι η τυπική δέσμη συντελεστή βαθμού-(k 2) στην καμπύλη modular, με τη σύμβαση του [BSV22b, §2.3], και οι δυϊκοί τελεστές Hecke ενεργούν μέσω του ιδιοσυστήματος του ξ. Με αυτή τη σύμβαση, το Vξ δεν διακλαδώνεται εκτός του pNξ και

$$\operatorname{tr} \mathrm{Fr}_q; V_\xi = a_q(\xi) \qquad (q \quad pN_\xi),$$

όπου Frq είναι ο αριθμητικός Frobenius. Όλες οι αναστροφές και οι δυϊκές μεταβλητές λαμβάνονται υπόψη ως προς αυτήν την γεωμετρική κανονικοποίηση.

Αν το ξ είναι συνηθισμένο στο p, ο περιορισμός του σε GQp έχει ένα συνηθισμένο φιλτράρισμα

$$0 \quad V_\xi^{+} \quad V_\xi \quad V \quad 0, \tag{2.2}$$

στην οποία και τα δύο διαβαθμισμένα κομμάτια έχουν διάσταση ένα και το V δεν είναι διακλαδωμένο. Αριθμητική Frobenius ξ ξ για το μέσω της μοναδιαίας ρίζας του πολυωνύμου Hecke στο p, και χρησιμοποιούμε τις ίδιες υπερ-πράξεις σε σενάρια V αντίστοιχο φιλτράρισμα σε οικογένειες. Παρατηρήστε ότι όταν υπάρχει μια δυϊκή ή μια συστροφή Tate, οι χαρακτήρες στα διαβαθμισμένα κομμάτια αλλάζουν ανάλογα. Για να αποφευχθεί οποιαδήποτε σύγχυση, θα καταγράφουμε πάντα τον χαρακτήρα που προκύπτει στο σημείο όπου χρησιμοποιείται η προβολή.

2.2. Χώρος βαρών, οικογένειες και εξειδίκευση. Έστω Λwt = O[[1 + pZp]]. Ένα αριθμητικό σημείο βάρους k 1 είναι ένας συνεχής ομομορφισμός ν : Λwt Qp του οποίου ο περιορισμός σε 1 + pZp έχει τη μορφή

$$z \quad z^{k\ 2}\epsilon(z)$$

για έναν χαρακτήρα πεπερασμένης τάξης ϵ. Χρησιμοποιούμε έντονα γράμματα όπως f, g και h για οικογένειες Hida ή Coleman, και γράφουμε Vf για τη σχετική ενότητα Galois δεύτερης τάξης πάνω από την άλγεβρα συντελεστών της.
Σε έναν συνηθισμένο κλάδο υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$0 \quad V_f^{+} \quad V_f \quad V \quad 0 \tag{2.3}$$

των GQp -μονάδων, των οποίων ο σχηματισμός είναι συμβατός με την εξειδίκευση στα κλασικά σημεία που εξετάζονται παρακάτω.

Σε ένα p-κανονικό σημείο κυψελιδικού στελέχους βάρους ένα χρησιμοποιούμε το κριτήριο «εταλικότητας» του [BD16], ενώ σε ένα ακανόνιστο σημείο Eisenstein χρησιμοποιούμε τον κλάδο κυψελιδικού στελέχους του [BDP22]. Σημειώστε ότι στην τελευταία περίπτωση η πλήρης τοπική ιδιοκαμπύλη μπορεί να είναι μοναδική, παρόλο που αυτός ο κλάδος είναι «εταλικός» έναντι του βάρους. χώρος.

Για την οικογένεια CM μέσω E1(1, εK) που χρησιμοποιείται στο [BDV22, Πρόταση 2.2], μεγεθύνετε το L έτσι ώστε το σημείο x με βάρος ένα είναι L-λογικό. Η επιλεγμένη συνομολογική υλοποίηση ικανοποιεί

$$V_f \quad x\ L \quad L \quad L(\varepsilon_K), \tag{2.4}$$

όπου η πρώτη προσθετική τιμή έχει τετριμμένη δράση Galois. Για ένα σημείο Eisenstein εκτός CM, ωστόσο, μια διασπασμένη ίνα είναι μια ιδιότητα του επιλεγμένου πλέγματος και δεν προκύπτει από την ημι-απλή αναπαράσταση Artin. Στη ρύθμιση κοινού αγωγού της Ενότητας 6.1, το [SW21, Θεώρημα 1.5] παρέχει μια διασπασμένη ίνα για την εντοπισμένη συμπαγή υλοποίηση της βοηθητικής οικογένειας. Η τενσοροποίηση αυτής της πλήρους υλοποίησης δεύτερης τάξης κατά χ1 δίνει μια διασπασμένη υλοποίηση της γενικής αναπαράστασης της οικογένειάς μας. Η κανονικότητα της κλάσης Kato σε αυτήν την υλοποίηση είναι ένα διαφορετικό ζήτημα, το οποίο συζητάμε στην Ενότητα 5.3, μαζί με την τοπική κατεύθυνση που επιλέγεται από το συνηθισμένο φιλτράρισμα στην προκύπτουσα ίνα.

Κάθε φορά που ο χάρτης βαρών είναι «etale στο x», συρρικνωνόμαστε σε έναν δίσκο U στον οποίο το βάρος είναι μια τοπική συντεταγμένη. Γράφουμε AU για την άλγεβρα συντελεστών του, και X AU για έναν ομογενοποιητή που μηδενίζεται στο x. Οποιοσδήποτε πρώτος όρος στην κατεύθυνση του βάρους γίνεται κατανοητός ως προς το X. Σημειώστε ότι οι λόγοι δύο πρώτων παραγώγων δεν εξαρτώνται από αυτήν την επιλογή ομογενοποιητή.

Machine Translated by Google

2.3. Ακανόνιστη σειρά Eisenstein βάρους-ένα. Έστω χ1 και χ2 πρωτογενείς χαρακτήρες Dirichlet των αγωγών N1 και N2, πρώτοι ως προς το p, και υποθέτοντας

$$\chi_1\chi_2(-1) = -1.$$

Η σχετική σειρά Eisenstein βάρους-ένα είναι

$$E_1(\chi_1, \chi_2) = c_0(\chi_1, \chi_2) + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d \mid n} \chi_1(n/d)\chi_2(d) \right) q^n, \tag{2.5}$$

όπου

$$c_0(\chi_1, \chi_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} L(0, \chi_2), & \text{αν } \chi_1 = 1, \\ \frac{1}{2} L(0, \chi_1), & \text{αν } \chi_2 = 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έχει βάρος 1, επίπεδο ήμερου N1N2 και τύπο νέμπρετ χ1χ2. Οι δύο ρίζες του πολυωνύμου Hecke στο p είναι χ1(p) και χ2(p). Λέμε ότι είναι p-μη κανονικό αν (2.6) χ1(p) = χ2(p).

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μια μοναδική συνηθισμένη p-σταθεροποίηση, και τα αποτελέσματα του [BDP22] δίνουν έναν γενικά κυστιδικό συνηθισμένο κλάδο που διέρχεται από αυτό το σημείο, στον οποίο ο χάρτης βαρών είναι 'etale. Συμβολίζουμε με fa την οικογένεια σε αυτόν τον κλάδο.

Η ημι-απλοποίηση της αναπαράστασης στο σημείο Eisenstein είναι

$$V_f^{ss} \simeq L(\chi_1) \oplus L(\chi_2). \tag{2.7}$$

Ωστόσο, οι ακριβείς χαρακτήρες που εμφανίζονται σε μια κλάση συστήματος Euler που προβάλλεται εξαρτώνται από την αναπαράσταση των συντελεστών της. Για παράδειγμα, στην κανονικοποίηση Kummer της Ενότητας 5, χρησιμοποιούμε $H^1_{\varphi}(\mathbb{Q}, W_f \otimes V)$, της οποίας η ημι-απλοποίηση στο βάρος ένα έχει συστατικά $L(\chi \cdot \omega^{-1})(1)$. Η παρερμηνεία Tate προέρχεται εδώ από την υλοποίηση που χρησιμοποιείται για τη σύγκριση κλάσεων με μονάδες και δεν υπάρχει στην αναπαράσταση Artin (2.7). Ο διαχωρισμός της επιλεγμένης ίνας και η συμβατότητά της με την κλάση Kato και τον συνηθισμένο ρυθμιστή της συζητούνται ξεχωριστά στην Ενότητα 5.3.

Μια ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση είναι

$$(\chi_1, \chi_2) = (1, \varepsilon_K), \text{ όπου}$$

K/Q είναι ένα φανταστικό τετραγωνικό πεδίο στο οποίο το p διασπάται. Τότε $\varepsilon_K(p) = -1$, η μοναδική p-σταθεροποίηση είναι

$$E_1(1, \varepsilon_K)(q) - E_1(1, \varepsilon_K)(q^p), \text{ και ο}$$

επιλεγμένος κυστιδικός κλάδος είναι μια οικογένεια CM Hida που σχετίζεται με το K. Αυτός είναι ο κλάδος που χρησιμοποιούμε στα επιχειρήματα διπλής εκφύλισης της §8.

2.4. Περίοδοι και η συζυγής p-αδική L-συνάρτηση. Έστω f μια γενικά κυστειδική οικογένεια πάνω από $\mathcal{A}^U$. Μια επιλογή βάσεων γ στους δύο ιδιοχώρους μιγαδικής σύζευξης καθορίζει συμβατές περιόδους $\Omega^{\pm}_{\varphi}$ στις κλασικές κυστειδικές εξειδικεύσεις της. Με αυτές τις επιλογές, η Hida's

Η κατασκευή [Hid16], στη διατύπωση ιδιοποικιλότητας του [Bel21], δίνει μια συζυγή p-αδική L-συνάρτηση

$$L_p(\mathrm{Ad}\, f) \in \mathcal{A}^U.$$

Σε κλασικά σημεία βάρους τουλάχιστον δύο, παρεμβάλλει την $L^{\mathrm{alg}}(\mathrm{Ad}\, f_x, 1)$ πολλαπλασιασμένη με τους τυπικούς παράγοντες p-Euler, και σε ένα p-διακριτό κλασικό σημείο παράγει, έως και μία μονάδα, το ιδανικό συμφωνίας του κλάδου.

Σε ένα ακανόνιστο σημείο Eisenstein, ωστόσο, η υπολειμματική αναπαράσταση δεν διακρίνεται p-και η προηγούμενη δήλωση σχετικά με το ιδανικό της ομοιομορφίας δεν μπορεί απλώς να εξειδικευτεί. Αντιμετωπίζουμε αυτό το ζήτημα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Για τη σύγκριση με γενικούς αγωγούς καθορίζουμε τη σειρά του παράγοντα συζυγούς στις επιλεγμένες περιόδους και όποτε απαιτείται ένα απλό μηδέν

Machine Translated by Google

Το δηλώνουμε ρητά ως υπόθεση (βλ. Υπόθεση 5.8). Για το αποτέλεσμα κοινού αγωγού, αντίθετα, διατηρούμε τον συζυγή παράγοντα μαζί με τους βοηθητικούς παράγοντες και τους παράγοντες περιόδου στον πλήρη συντελεστή αμοιβαιότητας, έτσι ώστε το Πόρισμα 6.10 να μην απαιτεί ξεχωριστό ισχυρισμό σχετικά με τη σειρά του συζυγούς παράγοντα.

2.5. Κυκλοτομικές μεταβλητές και συναρτήσεις Dirichlet. Ταυτοποιούμε Γ = Gal(Q(μp)/Q) με Z από τον κυκλοτομικό χαρακτήρα και γράφουμε

$$z = \omega(z) \quad z \quad , \qquad \Gamma = \quad \times \Gamma 1, \quad = \mu p \quad 1, \Gamma 1 = 1 + pZp.$$

Εδώ το ω αντιπροσωπεύει τον χαρακτήρα Teichmüller. Έστω Λcyc = OL[[Γ]], ΛL = OL[[Γ1]][1/p], και έστω ΗΓ η άλγεβρα των L-τιμών τοπικών αναλυτικών κατανομών. Μια σταθερή ω-συνιστώσα λαμβάνεται μέσω του ιδιότροπου ea L[Δ], και τα φραγμένα μέτρα της σχηματίζουν ένα αντίγραφο του ΛL. Λέμε ότι η συνιστώσα είναι άρτια όταν το a είναι άρτιο. Η τετριμμένη συνιστώσα Teichmüller αντιστοιχεί σε a = 0, δηλαδή, σε χαρακτήρες που είναι τετριμμένοι στο Δ αλλά ποικίλλουν στο Γ1. ρ(z) dμ(z), με ρ πεπερασμένης

Για ένα μέτρο μ, η σημειογραφία μ(ρ) σημαίνει τάξης. Στο -συνιστώσα που γράφουμε

$$\mu(j) = \int_{\Gamma} \omega(z)\, a \quad z^{\,\iota}\, d\mu(z).$$

Επομένως, οι χαρακτήρες πεπερασμένης τάξης και οι αναλυτικοί εκθέτες είναι απλώς δύο είδη αξιολογήσεων του ίδιου μέτρου. Το μέτρο Dirac [m] σε έναν ακέραιο m πρώτο ως προς το p έχει τιμές ρ(m) και ω(m) a mj , αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε την ενέλιξη ι : [z] [z] όταν μεταφράζουμε την αντίστροφη κυκλοτομική παραμόρφωση στην συνομολογία σε αυτήν τη σύμβαση Mellin. Σε μια σταθερή συνιστώσα, το ΗΓ είναι ο δακτύλιος των αναλυτικών συναρτήσεων στον κυκλοτομικό ανοιχτό δίσκο, ο οποίος είναι ένα ολοκληρωτικό πεδίο, και γράφουμε ΚΓ για το κλασματικό του πεδίο.

Για έναν άρτιο χαρακτήρα Dirichlet β, L (β, s) υποδηλώνει την τυπική συνάρτηση Kubota–Leopoldt tion, με σύμβαση

$$\text{μηγάδα } \pi \text{ Κουάντα Λογισμός}(\beta, 1 \quad n) = 1 \quad (\beta\omega \quad n)(p)p^{\,n\ 1}\, L(\beta\omega \quad n\,, 1 \quad n), \qquad n \quad 1.$$

Ορίζουμε τον παράγοντα Euler σε 1 όταν ο χαρακτήρας διακλαδώνεται στο p. Η τιμή στο s = 1 γίνεται κατανοητή από την p-αδική συνέχεια. για έναν πρωτόγονο μη τετριμμένο άρτιο χαρακτήρα ν του αγωγού m διαιρούμενο με το p, ο λογαριθμικός τύπος του Leopoldt έχει ως εξής:

$$\text{μηγάδα } \pi \text{ Κουάντα Λογισμός}(\nu, 1) = \frac{\tau m(\nu)}{\mu} \sum_{b \ (Z/mZ)\times} \nu^{\ 1}(\beta) \log p\,(1 \quad \zeta_m^{\sigma\iota}), \qquad \tau m(\nu) = \sum_{\sigma\iota} \nu(\beta)\zeta_{\mu.}^{\sigma\iota}$$

Εδώ οι ρίζες της μονάδας επιλέγονται συμβατά. Αυτό διορθώνει την ομαλοποίηση των p-αδικών L-συναρτήσεων Dirich-let που χρησιμοποιούνται τόσο στον ρυθμιστή κυκλικής μονάδας όσο και στον υπολογισμό αρθρωτού συμβόλου των Ενοτήτων 5–6.

3. Συναρτήσεις Eisenstein και πλέγματα Galois

Σε αυτήν την ενότητα υπενθυμίζουμε την ολοκληρωτική σύγκριση μεταξύ της ανοιχτής και της συμπυκνωμένης αρθρωτής καμπύλης που αναπτύχθηκε στο [RR24]. Οι δύο καμπύλες δίνουν πλέγματα στην ίδια ορθολογική αναπαράσταση Galois, των οποίων τα πηλίκα Eisenstein μπορεί να φέρουν αντίθετες υπολειμματικές επεκτάσεις. Αυτό το φαινόμενο συνδέει την εικασία του Sharifi με την εξειδίκευση των κλάσεων του συστήματος Euler και αποτελεί το ολοκληρωτικό πρωτότυπο των συγκρίσεων περιόδων των επόμενων ενοτήτων. Επισημαίνουμε ότι η μορφή βάρους-δύο f, ο εκθέτης ισοδυναμίας t και οι καμπύλες YY χρησιμοποιούνται μόνο σε αυτήν την ενότητα. ,

Machine Translated by Google

3.1. Η ισοτιμία Eisenstein. Έστω p 5 ένας πρώτος αριθμός, έστω N ικανοποιεί την p Nφ(N), και έστω θ : (Z/NZ) × O× ένας άρτιος χαρακτήρας Dirichlet. Εδώ το O αντιπροσωπεύει τον δακτύλιο ακεραίων μιας πεπερασμένης επέκτασης L/Qp, με μέγιστο ιδανικό p = (πL) και πεδίο υπολειμμάτων k. Επιβάλλουμε τις συνήθεις υποθέσεις που εγγυώνται ότι η σειρά Eisenstein με βάρος δύο E2(θ, 1) είναι καλά ορισμένη στο επίπεδο Γ1(N) και ότι το μέγιστο

ιδανικό

Eisenstein που εξετάζεται δεν είναι εξαιρετικό. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε θ(p) 1 O×. Διατηρούμε την ισοτιμία και τη συνομολογική διάταξη του [RR24, §2], συμπεριλαμβανομένου του ιδιοσυστήματος στους κακούς πρώτους αριθμούς, και αφήνουμε f S2(N, θ; O)

να είναι μια κανονικοποιημένη ιδιομορφή του κυστιδίου που ικανοποιεί

$$a_\ell(f) \equiv \theta(\ell) + \ell \pmod{\mathfrak{p}^{t}} \qquad (\ell \nmid N\mathfrak{p}), \tag{3.1}$$

για κάποιο t 1. Θεωρούμε το t ως τον ακριβή εκθέτη ισοτιμίας, δηλαδή, το σύστημα ιδιοτιμών Hecke των f παραγόντων μέσω του πηλίκου Eisenstein modulo $\mathfrak{p}^{t}$, αλλά όχι modulo $\mathfrak{p}^{t+1}$.

Γράψτε I_f^* τον πυρήνα του αντιθετικού ιδιοσυστήματος Hecke που συνδέεται με το f. Σύνολο

$\overline{Y} = X_1(N)_{\mathbb{Q}}$, $Y = \overline{Y}_1(N)_{\mathbb{Q}}$, $C = Y \setminus Y$, και έστω $\iota : Y \to Y$ συμβολίζει

την ανοιχτή εμβάπτιση. Οι δύο φυσικές ολοκληρωτικές πραγματοποιήσεις της αναπαράστασης που συνδέεται με το f είναι οι ακόλουθες, όπου τα υπογεγραμμένα X και Y αναφέρονται στην συμπυκνωμένη καμπύλη $\overline{Y} = X_1(N)_{\mathbb{Q}}$ και στην ανοιχτή καμπύλη Y, αντίστοιχα: $T_{f,X} := H_1(\overline{Y}, \mathcal{O}(1))/I_f$, $T_{f,Y} := H_1(Y, \mathcal{O}(1))/I_f$ (3.2)

Μετά την τενσοροποίηση με L, και οι δύο ενότητες πραγματοποιούν την ίδια δισδιάστατη αναπαράσταση:

$$V_f := T_{f,X} \otimes L \cong T_{f,Y} \otimes L.$$

Παρατηρήστε ότι αυτά τα πηλίκα Hecke μπορεί να έχουν O-στρέψη και ότι οι ολοκληρωτικές δομές τους μπορεί να διαφέρουν παρόλο που οι λογικές τους πραγματοποιήσεις συμφωνούν. Κάθε φορά που χρησιμοποιούμε μια πραγματική βάση παρακάτω, περιοριζόμαστε ρητά στην περίπτωση πλεγμάτων χωρίς στρέψη.

3.2. Το οριακό πηλίκο. Το πλήρες ιδιοσύστημα Hecke, μαζί με την πρόταση κορεσμού του [RR24, Πρόταση 2.1], μας επιτρέπει να περάσουμε την ακολουθία εντοπισμού σε αυτά τα πηλίκα. Συγκεκριμένα, ο περιορισμός προκαλεί μια ακριβή ακολουθία

$$0 \to T_{f,X} \to T_{f,Y} \to \mathrm{Div}_0(C; \mathcal{O})/I_f \to 0. \tag{3.3}$$

Η οριακή ενότητα είναι η Eisenstein: μακριά από το N p, ο δυϊκός τελεστής Hecke T μέσω $1 + \ell\langle\ell\rangle$ όπου $\langle\ell\rangle$ ενεργεί πάνω σε αυτό και στον ιδιοχώρο που αποκόπτεται από το I_f^*, πράξεις από $\theta^{-1}(\ell)$, αυτό είναι η ιδιοτιμή $\theta^{-1}(\ell)(\theta(\ell) + \ell)$ του αντισυστατικού ιδιοσυστήματος, συμβατό με την (3.1). Η δράση Galois σε αυτόν τον ιδιοχώρο δίνεται από θ. Δεδομένου ότι το t είναι ο ακριβής εκθέτης ομοιομορφίας, λαμβάνουμε την ακόλουθη περιγραφή.

Πρόταση 3.1. Υπάρχει μια ακριβής ακολουθία O[GQ]-μονάδων

$$(\theta) \to 0. \qquad T_{f,X} \otimes T_{f,Y} \otimes \mathcal{O}/\mathfrak{p}^{t} \to \pi_{\mathrm{Eis}} \to \tau \tag{3.4}$$

Η τελική ταυτοποίηση είναι κανονική μόνο μέχρι τον πολλαπλασιασμό με ένα στοιχείο του $(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^{t})^\times$.

Απόδειξη. Η ακολουθία εντοπισμού δίνει μια ακριβή ακολουθία πριν από τη λήψη του f-ισοτυπικού πηλίκου, και η ακρίβεια στα αριστερά μετά τη λήψη αυτού του πηλίκου είναι ακριβώς η δήλωση κορεσμού.

$$\mathrm{Av}^* H_1(Y, \mathcal{O}(1)) \to H_1(Y, \mathcal{O}(1)) = I_f \to H_1(\overline{Y}, \mathcal{O}(1))^*;$$

εδώ χρησιμοποιήσουμε την πρόταση κορεσμού στο [RR24, Πρόταση 2.1], υπό τις τρέχουσες υποθέσεις της, για να λάβουμε την (3.3). Επιπλέον, η δράση Hecke στις ακμές εξαρτάται από τους παράγοντες Eisenstein

Machine Translated by Google

πηλίκο, και η σχετική θ-ισοτυπική οριακή ενότητα είναι κυκλική. Δεδομένου ότι το t είναι ο ακριβής εκθέτης ομοιομορφίας, αυτή η ενότητα έχει μήκος t και επομένως είναι ισόμορφη με το O/p, ο τυπικός υπολογισμός της δράσης Galois στις ακμές $^{\tau}$Τέλος, προσδιορίζει τον χαρακτήρα της με θ· βλέπε [Ste82, Θεώρημα 1.3.1].

Εδώ εμφανίζονται δύο εκ των προτέρων διαφορετικοί ακέραιοι αριθμοί. Ο εκθέτης ισοτιμίας t μετρά το μήκος του πηλίκου στο (3.4), ενώ η αποτίμηση ενός γενικευμένου αριθμού Bernoulli - για παράδειγμα vp(B2(θ)) στην παρούσα κανονικοποίηση - μετρά το μέγεθος μιας ενότητας ισοτιμίας Eisenstein.
Ο προσδιορισμός αυτών των δύο μεγεθών απαιτεί ένα πρόσθετο αριθμητικό κριτήριο, το οποίο συνήθως παρέχεται από ένα ιδεώδες Eisenstein ή ένα θεώρημα Gorenstein, και δεν αποτελεί τυπική συνέπεια της ύπαρξης της συμφωνίας.

3.3. Καθολικά και συνηθισμένα φιλτραρίσματα. Για μια O-μονάδα T, γράψτε $T = T/p\,tT$. Η ισοτιμία Eisen-stein προσδίδει στο Tf,X καθολικό φιλτράρισμα. Με την Tate συστροφή που χρησιμοποιείται στην (3.2), παίρνει τη μορφή

$$0 \quad T^{+}_{Tf,X} \quad T \quad 0,\ f,X\ f,X \tag{3.5}$$

όπου τα πρόσημα αναφέρονται στη δράση της σύνθετης συζυγίας. Η φαινομενική αντιστροφή των προσήμων σε σχέση με ορισμένες διατυπώσεις της εικασίας του Sharifi οφείλεται στην παρέκκλιση του Tate στη σύμβασή μας· συγκρίνετε [Sha11, Θεώρημα 4.3] και [FK24, § 6.3.1, § 7.1.11].

Από την άλλη πλευρά, η κανονικότητα δίνει, για $\{X, Y\}$, μια ακριβή ακολουθία από $O[GQ_p]$-μονάδες

$$0 \quad T\,f, \quad ^{\text{υπο}} \quad Tf, \quad T \quad ^{\text{κβο}}_{f,} \quad 0, \tag{3.6}$$

όπου το πηλίκο είναι μη διακλαδωμένο. Στην κανονικοποίηση βάρους-δύο που χρησιμοποιείται εδώ, το GQ_p δρα στην υπομονάδα μέσω του κυκλοτομικού χαρακτήρα, μέχρι τον μη διακλαδωμένο χαρακτήρα που υπαγορεύεται από την επιλεγμένη σταθεροποίηση p. Η καθολική ακολουθία (3.5) διασπάται κατά τον περιορισμό στο GQ_p , και τα δύο φιλτραρίσματα είναι εγκάρσια με την ακριβή έννοια ότι

$$T^{+} \quad T\,f,X\ f,X, \quad ^{\text{κβο}} \qquad T \quad ^{\text{υπο}}\ Tf\ ,Xf,X. \tag{3.7}$$

Συγκεκριμένα, η συνηθισμένη υπομονάδα και το αντίστοιχο αρνητικό καθολικό πηλίκο είναι απαλλαγμένα από βαθμό ένα ως προς $^{\tau}$Το συνηθισμένο πηλίκο, ωστόσο, μπορεί να περιέχει ακόμα στρέψη που κληρονομείται το O/p από το πηλίκο Hecke, και επανερχόμαστε σε αυτό το ζήτημα στην §3.5.

Δεδομένου ότι το πηλίκο στην (3.4) δεν έχει διακλαδώσεις στο p, η απεικόνιση μεταξύ των δύο πλεγμάτων προκαλεί ένα ισομορφισμός στις συνηθισμένες υπομονάδες:

$$T^{\text{υπο}}_{f,X} = T\,f,Y\ .^{\text{υπο}} \tag{3.8}$$

Επομένως, το πέρασμα από το Y στο Y μόνο διευρύνει το συνηθισμένο πηλίκο, και αυτή είναι η τοπική εκδήλωση της συνολικής αλλαγής της επέκτασης που περιγράφουμε στη συνέχεια.

3.4. Η αλλαγή του πλέγματος αντιστρέφει την επέκταση. Για να εμφανίσουμε την αλλαγή της επέκτασης ως προς τους πίνακες, ας υποθέσουμε σε αυτήν την παράγραφο ότι τα δύο πηλίκα Hecke είναι ελεύθερα πλέγματα βαθμού δύο και ότι τα συνηθισμένα φιλτραρίσματά τους είναι κορεσμένα. Αυτό είναι το μοντέλο χωρίς στρέψη της προηγούμενης κατασκευής και οι γενικές ενότητες πηλίκου αντιμετωπίζονται στην επόμενη υποενότητα. Επιλέξτε μια βάση O {u, v} των Tf,X έτσι ώστε, modulo p η κλάση του u παράγει T και η κλάση του v παράγει T. Σε σχέση με αυτήν τη βάση, η δράση Galois $f,X\ f,X.$ έχει το σχήμα $^{\tau},$ $^{+}$ $^{\text{υπο}}$

$$\rho Tf,X\ (\sigma) = \begin{matrix} A(\sigma)\ \pi & ^{\tau}B(\sigma) \\ C(\sigma)\ D(\sigma)\ , & \end{matrix} \qquad \sigma \quad GQ. \tag{3.9}$$

Η διαιρετότητα της άνω δεξιάς καταχώρησης εκφράζει τη σταθερότητα της γραμμής που παράγεται από το v modulo p^{τ}, και η τοπική διάσπαση στο p λέει, επιπλέον, ότι το $C|GQ_p$ διαιρείται με το π^{τ}.

Machine Translated by Google

Οι Πρόταση 3.1 και (3.8) δείχνουν ότι το {u, π tv } είναι μια βάση του Tf,Y . Σε αυτή τη νέα βάση το ίδιο η ορθολογική αναπαράσταση περιγράφεται από

$$\rho_{T_{f,Y}}(\sigma) = \begin{pmatrix} A(\sigma) & B(\sigma) \\ \pi LC(\sigma) & D(\sigma). \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Συνεπώς, η γραμμή που παράγεται από το u είναι πλέον καθολικά σταθερή modulo p. Από το κοινό Η ημι-απλοποίηση είναι

$$\overline{T}^{ss} \simeq \overline{T}^{ss}_{f,X} \otimes \overline{T}^{ss}_{f,Y} \qquad O/p^{\tau}(1) \qquad O/p^{\tau}(\theta),$$

παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία

$$0 \qquad O/p^{\tau}(1) \qquad \overline{T}_{f,Y} \qquad \overline{O/p}^{\tau}(\theta) \qquad 0. \tag{3.11}$$

Η σύγκριση μεταξύ (3.9) και (3.10) είναι η κεντρική παρατήρηση γραμμικής άλγεβρας αυτής της ενότητας: μεγέθυνση ενός διανύσματος βάσης κατά π από τη μια μη διαγώνια καταχώρηση στην άλλη. Με αυτόν τον τρόπο, αλλάζει ποιος χαρακτήρας υπολοίπου είναι υποαναπαράσταση και ποιος είναι πηλίκο, ενώ η περιβάλλουσα ρητή αναπαράσταση παραμένει η ίδια.

3.5. Το συνηθισμένο πηλίκο χωρίς στρέψη. Υπενθυμίζεται ότι τα κανονικά πηλίκα στην (3.6) δεν χρειάζεται να είναι ελεύθερα ως προς το O. Έστω ΣΧ και ΣΥ τα αντίστοιχα υπομοντέλα στρέψης τους, και βάλτε

$$T^{\text{κβο}}_{f,Y,} := T^{\text{κβο}}_{f,Y} /\Sigma Y .$$

Αυτή είναι μια ελεύθερη O-μονάδα τάξης ένα, και αν ψf δηλώνει τον μη διακλαδωμένο χαρακτήρα που δίνει τη δράση του GQp στο συνηθισμένο πηλίκο, τότε (3.12)

$$O(\psi_f), \qquad T^{\text{κβο}}_{f,Y,} \qquad T^{\text{quo}}_{f,Y,} /\pi^{\tau} \qquad O/p^{\tau}(\theta).$$

Ο δεύτερος ισομορφισμός, όπως και το τελευταίο βέλος στο (3.4), είναι καλά ορισμένος μόνο μέχρι μια μονάδα.

Σύμφωνα με την ασθενή υπόθεση Gorenstein που χρησιμοποιείται στο [RR24]—ισοδύναμα, στην παρούσα μίμηση, υπό την υπόθεση ότι η απόκλιση O/p ΣΥ /ΣΧ$^{\tau}$ περίπτωση για το -(θ) δεν εμφανίζεται ως πηλίκο της στρέψης —η προβολή Eisenstein σκοτώνει ΣΥ t O/p /p , και επομένως λαμβάνει υπόψη ως

$$T_{f,Y} \quad T^{\text{κβο}}_{f,Y,} \quad T^{\text{quo}}_{f,Y,} \quad {}^{\tau}(\theta). \tag{3.13}$$

Αυτή η παραγοντοποίηση είναι που καθιστά το πηλίκο συμβατό με την συνήθη τοπική συνθήκη και, ως εκ τούτου, κατάλληλο για επιχειρήματα του συστήματος Euler.

3.6. Σχέση με την εικασία του Sharifi. Η συμπαγής και η ανοιχτή καμπύλη δίνουν έτσι δύο ολοκληρωτικά μοντέλα της ίδιας ρητής αναπαράστασης. Η ομοιότητα Eisenstein εμφανίζεται στην επέκταση που φέρεται από τα Tf,X, και η διεύρυνση του πλέγματος μετακινεί τα δεδομένα επέκτασης στην άλλη εκτός διαγωνίου καταχώρηση, όπως στις (3.9)–(3.10). αυτή η αλλαγή του πλέγματος ελέγχεται από το οριακό πηλίκο.
Ο χάρτης πEis εξάγει στη συνέχεια τον χαρακτήρα Eisenstein μέσω του συνηθισμένου πηλίκου. Σε αυτό το πλαίσιο, η σύγκριση της προβαλλόμενης κλάσης του συστήματος Euler με την κυκλοτομική κλάση που προβλέπεται από την εικασία του Sharifi είναι το αντίστοιχο της θεωρίας της συμφωνίας του εκφυλισμού στις οικογένειες που εξετάζουμε στην επόμενη ενότητα.

4. Εκφυλισμός Eisenstein στις οικογένειες

Τώρα περνάμε από μια σταθερή ομοιότητα σε μια παραμόρφωση μίας παραμέτρου. Η βασική στρατηγική παραμένει η ίδια: τοποθετούμε μια εξειδίκευση Eisenstein μέσα σε μια γενικά κυψελιδική οικογένεια, κατασκευάζουμε την σχετική αναπαράσταση Galois ή την κλάση συστήματος Euler μακριά από το σημείο Eisenstein και μελετάμε τον κύριο όρο της σε αυτό το σημείο. Η γεωμετρία διαφέρει στις δύο περιπτώσεις που εξετάζουμε. Ένα σημείο Eisenstein με κρίσιμη κλίση, βάρους τουλάχιστον δύο, βρίσκεται σε μια γενικά κυψελιδική οικογένεια Coleman. Ένα σημείο με ακανόνιστο βάρος ένα προσεγγίζεται κατά μήκος ενός συνηθισμένου κυψελιδικού κλάδου, ο οποίος στο τετραγωνικό περιβάλλον του [BDV22] είναι μια οικογένεια CM Hida.

Machine Translated by Google

4.1. Σημεία Eisenstein κρίσιμης κλίσης. Έστω r 0, και έστω ψ και τ είναι πρωτογενείς χαρακτήρες Dirichlet αγωγών που είναι πρώτοι ως προς το p και ικανοποιούν ψτ (1) = (1)r . Θεωρήστε τη σειρά Eisenstein Er+2(ψ, τ)

και υποθέστε ότι το επίπεδό του είναι πρώτο ως προς το p. Το πολυώνυμο Hecke στο p έχει ρίζες

$$\alpha = \psi(p), \qquad = p \quad r+1\tau(p). \ \beta$$

Γράφουμε

$$= E \text{ για } \quad r+2(\psi, \tau) \ f\beta$$

την p-σταθεροποίηση με ανοδική ιδιοτιμή β, η οποία είναι η βελτίωση της κρίσιμης κλίσης αφού vp(β) = r + 1.

Ακολουθώντας το [LR24], και τη μελέτη της γεωμετρίας σε κρίσιμα σημεία του [BC06], επιβάλλουμε δύο υποθέσεις. Πρώτον, το fβ είναι p-αρκετά: είτε r > 0, είτε r = 0 και, για κάθε πρώτο ℓ | N p, ο αγωγός του ψ/τ διαιρείται με το ℓ ή (ψ/τ) (ℓ)≠ 1. Δεύτερον, το fβ δεν είναι κρίσιμο, πράγμα που σημαίνει ότι ο γενικευμένος ιδιοχώρος του στον χώρο των υπερσύγκλινων αρθρωτών μορφών είναι μονοδιάστατος.
Σε αυτή τη ρύθμιση Eisenstein, η τελευταία συνθήκη είναι ισοδύναμη με την

(4.1) τ, r + 1)≠ 0. Lp(ψ 1

Εδώ Lp(ψ 1 τ, s) δηλώνει την p-adic L-συνάρτηση Kubota–Leopoldt του ψ 1 τ στην κανονική-

οντοποίηση του [LR24]. Δεδομένου ότι ψ για περιττό r, αυτή η κανονικοποίηση μπορεί να μην 1 τ έχει κατάλληλη δύναμη του χαρακτήρα Teichmüller, επομένως αυτή η συνάρτηση δεν πρέπει να συγχέεται με την KL τη συνάρτηση L της §2.5, την οποία χρησιμοποιούμε μόνο για άρτιους χαρακτήρες. Αυτές οι υποθέσεις παρέχουν

η τοπική γεωμετρία π που απαιτείται για τα επιχειρήματα εκφύλισης.

Θεώρημα 4.1 (Bellaiche; Bellaiche–Chenevier). Υποθέστε ότι το fβ είναι p-αξιοπρεπές και μη κρίσιμο.
Τότε η ιδιοκαμπύλη του κυστιδίου είναι ομαλή στο σημείο που ορίζεται από το fβ, και ο χάρτης βαρών είναι 'etale εκεί.
Συνεπώς, μετά τη συρρίκνωση γύρω από αυτό το σημείο, υπάρχει ένας κλειστός δίσκος βαρών U και μια μοναδική οικογένεια Coleman.

$$\Phi = \quad \text{an}(F)q^{n}$$

$$n \quad 1$$

πάνω από το U που ειδικεύεται στο fβ και είναι κυστιδικό σε κάθε κλασικό σημείο του U διαφορετικό από το σημείο Eisenstein.

Αυτή η πρόταση είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση των αποτελεσμάτων στην ιδιοκαμπύλη των [Bel12, LR24], και η παραπάνω διατύπωση είναι αυτή που χρησιμοποιείται στο [LR24]. Επιλέξτε μια συντεταγμένη βάρους X στο U η οποία μηδενίζεται στο fβ, και γράψτε O(U) για τον δακτύλιο των άκαμπτων αναλυτικών συναρτήσεων στο U. Τότε το = U {X = 0} είναι εξ ολοκλήρου οικογένεια των αναπαραστάσεων Galois, και στον σχετικό χώρο συνομολογίας του δίσκου μπορεί κανείς να εφαρμόσει τη θεωρία Fredholm. Ας ξεκινήσουμε πρώτα η

Η ειδική ίνα είναι αναγώγιμη και αυτή η αναγώγιμη ικανότητα μετριέται σε πρώτη τάξη από την παράμετρο βάρους. Πιο συγκεκριμένα, το ιδανικό αναγώγιμης ικανότητας του δισδιάστατου ψευδοχαρακτήρα πάνω από τον τοπικό δακτύλιο της ιδιοκαμπύλης είναι το μέγιστο ιδανικό που παράγεται από το X. Κατά συνέπεια, οι δύο φυσικές συνομολογικές πραγματοποιήσεις της οικογένειας έχουν διαφορετικές εξειδικεύσεις στο X = 0.

Για να συγκρίνετε με τα [LR24, PR25], γράψτε V c (fβ) και V (fβ) για τις ενότητες που χρησιμοποιούνται εκεί.
Η γενική κανονικοποίηση κατά cuspidal είναι διπλή της αριθμητικής-Frobenius κανονικοποίησης μας, και αυτές οι εργασίες επισυνάπτουν επίσης χαρακτήρες Dirichlet στον γεωμετρικό Frobenius, έτσι ώστε οι χαρακτήρες τους ψ και τ να γίνονται ψ και τ στη σημειογραφία μας. Επομένως, οι 1 ακριβείς ακολουθίες, μεταφρασμένες στη σύμβαση χαρακτήρων της §2, είναι 1

$$\tau\varepsilon \quad 1 \quad 1 \quad r\,0 \qquad V_c(f\beta) \qquad \psi \quad 1 \qquad 0, \tag{4.2}$$

$$0 \qquad \psi \quad 1 \qquad V(f\beta) \qquad \tau\, c(f\beta) \quad 1 \quad 1 \quad r\varepsilon \qquad 0. \tag{4.3}$$

χαρακτήρα. Η φυσική εικόνα V διαστάσεων του χάρτη, επομένως η συμπαγής υποστήριξη V(fβ) έχει ένα Ebyπ ε αντιπροσωπεύει τον p-αδικό κυκλοτομικό συνομολογία επιλέγουν αντίθετες επεκτάσεις

Machine Translated by Google

των ίδιων δύο χαρακτήρων. Αυτό είναι το ανάλογο, στο χαρακτηριστικό μηδέν και στις οικογένειες, της εναλλαγής μεταξύ Tf,X και Tf,Y στην §3.4.

4.2. Κύριοι όροι συστημάτων Euler με κυστίδια. Έστω V μία από τις συνεκτικές ενότητες Galois που συνδέονται με το F μέσω U, και έστω

$$zF \quad H1\ Q, V|U\times$$

να είναι μια κλάση που λαμβάνεται μεταβάλλοντας ένα σύστημα Euler με κυστίδιο. Αν και το zF είναι αναλυτικό στον τρυπημένο δίσκο, δεν χρειάζεται να βρίσκεται στο ολοκληρωτικό πλέγμα σε ολόκληρο τον δίσκο U, και μετά την επιλογή ενός πλέγματος μπορεί κανείς να έχει μόνο

$$zF \quad X \quad mH1\ (Q, V)\ (m \quad 0). \tag{4.4}$$

Το μικρότερο τέτοιο m είναι η τάξη του πιθανού πόλου. Ο πολλαπλασιασμός με Xm παράγει τότε μια ολοκληρωτική κλάση, της οποίας η εξειδίκευση στο X = 0 είναι ο κύριος όρος της εκφύλισης.

Είναι βολικό να διακρίνουμε δύο φαινόμενα. Πρώτον, ένας πόλος μπορεί να προέρχεται από την αναντιστοιχία μεταξύ των φυσικών συνομολογικών πλεγμάτων στο αναγώγιμο σημείο. Δεύτερον, ακόμη και όταν η οικογενειακή κλάση είναι ολοκληρωτική, η εξειδίκευσή της μπορεί να εξαφανιστεί για λόγους θεωρίας αναπαράστασης, και στη συνέχεια πρέπει να διαιρεθεί με μια επιπλέον δύναμη του X πριν από την εξειδίκευση. Οι ρητοί νόμοι αμοιβαιότητας συσχετίζουν αυτές τις τάξεις με τη τάξη της σχετικής p-αδικής L-συνάρτησης, αν και η ανάκτηση της τάξης της ίδιας της κλάσης απαιτεί επίσης κάποιο έλεγχο του πυρήνα του ρυθμιστή και του πλέγματος περιόδου. Η έξοδος είναι συνήθως μια κυκλοτομική μονάδα ή μια κλάση κυκλικών μονάδων, πολλαπλασιασμένη με την κατάλληλη p-αδική L-τιμή ή λογαριθμικό παράγοντα.

4.3. Ακανόνιστα σημεία Eisenstein βάρους ένα. Η κατάσταση βάρους ένα έχει διαφορετική γεωμετρία. Έστω E1(χ1, χ2) μια σειρά Eisenstein βάρους ένα, και υποθέστε ότι οι δύο ανοδικές της ρίζες συμπίπτουν:

$$\chi 1(p) = \chi 2(p).$$

Η προκύπτουσα βελτίωση είναι p-ακανόνιστη. Στην τετραγωνική περίπτωση που σχετίζεται με το [BDV22], έστω K ένα φανταστικό τετραγωνικό πεδίο στο οποίο το p διασπάται και έστω εK ο τετραγωνικός χαρακτήρας του. Τότε

$$\text{To } fK = E1(1, \varepsilon K)(q) \quad E1(1, \varepsilon K)(q\ p\ ) \text{ είναι η}$$

μοναδική p-σταθεροποίηση, αφού το πολυώνυμο Hecke στο p είναι (T 1)2 .

Υπενθυμίζεται ότι η πλήρης ιδιοκαμπύλη σε αυτό το σημείο μπορεί να είναι μοναδική και μη-Gorenstein (βλ. [Poz19]), επομένως για τη σύγκριση του συστήματος Euler χρησιμοποιούμε τον κυστιδικό κλάδο του. Δεδομένου ότι το εK είναι πρωτόγονο και περιττό, με εK(p) = 1, το [BDP22, Θεώρημα A(i)] δείχνει ότι αυτός ο κλάδος είναι ′etale ως προς τον χώρο βαρών. Επομένως, ένας αρκετά μικρός δίσκος βαρών φέρει μια συνηθισμένη οικογένεια Hida fK έως fK, η οποία είναι μοναδική μέχρι τη σύζευξη και έχει CM έως K.

Για την συνομολογική υλοποίηση CM που χρησιμοποιείται εδώ, η ίδια η ειδική αναπαράσταση διαιρείται ως εξής [BDV22, Πρόταση 2.2]: (4.5)

$$VfK \quad 1 \quad \varepsilon K.$$

Αυτή είναι μια ουσιαστική διαφορά σε σχέση με τις αντίθετες μη διαιρεμένες επεκτάσεις (4.2) και (4.3): η επαναλαμβανόμενη Άνω-ρίζα δεν οδηγεί στη γεωμετρία της περίπτωσης της κρίσιμης κλίσης, και αντ' αυτού η οικογένεια CM Hida παρέχει μια διακριτή συνήθη κατεύθυνση μέσω ενός σημείου στο οποίο η περιβάλλουσα ιδιοκαμπύλη μπορεί να έχει αρκετές συνιστώσες.

Η μέθοδος του [BDV22] τοποθετεί μια κλάση Beilinson-Flach σε μια οικογένεια που περιλαμβάνει fK και στη συνέχεια την εξειδικεύει στο σημείο ακανόνιστου βάρους-ένα. Χρησιμοποιώντας την αποσύνθεση (4.5), η εξειδικευμένη κλάση έχει δύο προβολές, που αντιστοιχούν στον τετριμμένο και στον τετραγωνικό χαρακτήρα, και οι ρητοί νόμοι αμοιβαιότητας ταυτοποιούν αυτές τις προβολές με κυκλοτομικές κλάσεις τύπου Kato, μέχρι τις αναμενόμενες p-αδικές L-τιμές και τους λογαριθμικούς παράγοντες. Επομένως, συγκρίνεται και πάλι ένα γενικά κυστιδικό σύστημα Euler με δεδομένα Eisenstein τάξης ένα, αλλά τώρα η σύγκριση οργανώνεται από την αποσύνθεση CM και όχι από ένα ζεύγος αντίθετων μη διαιρεμένων επεκτάσεων.

Machine Translated by Google

Το ζεύγος CM (1, εK), το οποίο χρησιμοποιούμε στην Ενότητα 8, βρίσκεται εκτός της ρύθμισης κοινού αγωγού του Θεωρήματος Α. Επιπλέον, η άρτια συνιστώσα του είναι τετριμμένη και η συνηθισμένη ιδιοτιμή του είναι 1, επομένως η μη εξαιρετική σύγκριση με κυκλικές μονάδες της Ενότητας 5 δεν ισχύει: σε αυτήν την περίπτωση ο πρώτος παράγοντας Dirichlet είναι μια συνάρτηση ζήτα, και η τοπική σύγκριση απαιτεί τις κανονικοποιήσεις της ρύθμισης του εξαιρετικά μηδενός.

4.4. Σύγκριση των δύο εκφυλισμών. Και οι δύο κατασκευές τοποθετούν ένα σημείο Eisenstein σε μια γενικά κυστιδική οικογένεια, αλλά οι συνομολογικές τους εξειδικεύσεις είναι διαφορετικές. Σε κρίσιμη κλίση, η συμπαγώς υποστηριζόμενη και η συνήθης συνομολογία δίνουν αντίθετες επεκτάσεις, και η παράμετρος βάρους μετρά τη διέλευση μεταξύ τους. Σε ακανόνιστο βάρος ένα, αντίθετα, η επαναλαμβανόμενη ρίζα Hecke οδηγεί σε μια διακριτή συνήθη κατεύθυνση σε μια διαιρεμένη υλοποίηση, όπως στην περίπτωση CM του [BDV22].

Στις συγκρίσεις των Ενοτήτων 5-6, οι περίοδοι καθορίζονται μέσω ενός συμπαγούς συνομολογικού πηλίκου τάξης ένα. Η προκύπτουσα αναλυτική παραγοντοποίηση μπορεί στη συνέχεια να συγκριθεί με τον ρυθμιστή μιας οικογενειακής κλάσης, υπό την προϋπόθεση ότι τόσο η κλάση όσο και ο ρυθμιστής της ειδικεύονται στην επιλεγμένη υλοποίηση, και εδώ ακριβώς εισέρχεται η διαφορά μεταξύ συμπαγούς και ανοιχτής συνομολογίας στο επιχείρημα του συστήματος Euler.

5. Κυκλικές μονάδες και στοιχεία Kato

Σε αυτήν την ενότητα συγκρίνουμε την εξειδίκευση βάρους-ένα του συστήματος Euler του Kato με το σύστημα Euler των κυκλικών μονάδων. Ακολουθώντας το επιχείρημα της κρίσιμης κλίσης του [PR25], η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν οι δύο ρητοί νόμοι αμοιβαιότητας για να προσδιοριστεί ο συντελεστής της επιζώσας κλάσης κυκλικών μονάδων. Σε αντίθεση με την περίπτωση της κρίσιμης κλίσης, ωστόσο, η αναλυτική παραγοντοποίηση δεν είναι διαθέσιμη εκ των προτέρων και πρέπει να καθοριστεί ξεχωριστά μόλις καθοριστεί η κανονικοποίηση περιόδου. Για αυτόν τον λόγο, πρώτα λαμβάνουμε την συνομολογική σύγκριση με βάση ένα πηλίκο p-αδικών L-συναρτήσεων και στη συνέχεια η Ενότητα 6 αξιολογεί τον αναλυτικό συντελεστή της στο περιβάλλον κοινού αγωγού.

Αφήνω

$$f = E_1(\chi_1, \chi_2) \text{ είναι}$$

μια ακανόνιστη σειρά Eisenstein βάρους ένα και ήρεμου επιπέδου $N = N_1N_2$, όπου χ_1 και χ_2 είναι χαρακτήρες Dirichlet αγωγών που είναι πρώτοι στο p και

$$\chi_1(p) = \chi_2(p).$$

Δεδομένου ότι η f έχει βάρος ένα, ο μη-βενθικός τύπος της $\chi_1\chi_2$ είναι περιττός. Διατάσσουμε τους χαρακτήρες με τέτοιο τρόπο ώστε το χ_1 να είναι άρτιο και το χ_2 περιττό, και υποθέτουμε σε όλο το χ_1 ότι είναι μη τετριμμένο. Έστω f η γενικά cuspidal συνηθισμένη οικογένεια που διέρχεται από το f, και έστω xf το αντίστοιχο σημείο του χώρου βαρών της. Γράφουμε AU για τον δακτύλιο συντελεστών της f σε ένα αρκετά μικρό και ορίζουμε μια τοπική παράμετρο αριθμητική σύμβαση Frobenius$_X$ AU που μηδενίζεται στο xf . γειτονιά U του xf . Στην της Ενότητας 2, η ημι-απλή αναπαράσταση Artin στο βάρος ένα είναι

$$V_f^{ss} = L(\chi_1) \quad L(\chi_2).$$

Εδώ, το $L(\chi_i)$ είναι ένας μονοδιάστατος L-διανυσματικός χώρος στον οποίο το $\sigma \in G_Q$ δρα μέσω $\chi_i(\sigma)$, και δεν υπάρχει Tate twist σε αυτόν τον τύπο. Αντίθετα, η απεικόνιση Kummer για ένα αριθμητικό πεδίο F παίρνει μια μονάδα στο $H^1(F, L(1))$, και επομένως η προβολή μιας κλάσης Kummer σε έναν χαρακτήρα Dirichlet οδηγεί φυσικά σε συντελεστές $L(\chi)$ στις μονάδες.

$$\chi^{-1})(1), \text{ όπου ο αντίστροφος χαρακτήρας αντισταθμίζει τον προβολέα χαρακτήρων}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση Kummer

$$W_f := V^*_{f(1),} \qquad W_{ss\,f} = L(\chi_1^{-1})(1) \quad L(\chi_2^{-1})(1).$$

Η γραμμή συντελεστών $L(\chi^{-1})(1)$ έχει δράση Galois χ^{-1}, δηλ. ε, και για να προβληθεί το εξειδικευμένο κλάση σε αυτήν χρειαζόμαστε τον διαχωρισμό του επιλεγμένου οικογενειακού πλέγματος που ορίζεται στην Υπόθεση 5.9.

Machine Translated by Google

Παρατήρηση 5.1 (Σύγκριση με το [PR25]). Η σημειογραφία στο [PR25] χρησιμοποιεί μια διαφορετική σύμβαση δυαδικότητας: η ενότητα V(f) χρησιμοποιεί Wf = Vf 1 συμφωνεί γενικά με το Vf μας , ενώ η σύγκριση με τις μονάδες (1). Σε μια ίνα με * διαιρεμένο βάρος-ένα, η δισδιάστατη δυαδικότητα προσδιορίζει την τελευταία με Vf L(ϵ το φά)(1), όπου ϵf = χ1χ2. Έτσι, για να χρησιμοποιήσουμε την κλάση [PR25, Ορισμός 4.6] εδώ, μεταφέρουμε μέσω αυτού του τύπου νεμπέντης και της συστροφής Tate, μαζί με την αντίστοιχη αλλαγή της κυκλοτομικής μεταβλητής. Η συμβατότητα αυτής της μεταφοράς με τον νόμο της αμοιβαιότητας αποτελεί μέρος της Υπόθεσης 5.9.

Γράψτε W για το επιλεγμένο συνηθισμένο πηλίκο κατάταξης ένα σε αυτήν την κανονικοποίηση· παρατηρήστε ότι φά είναι διαφορετικό από το μη διακλαδωμένο πηλίκο του Vf της Ενότητας 2.1. Απαιτούμε ότι

$$W_{\varphi\acute{a}}/XW_{\varphi\acute{a}} \cong L(\chi_1^{-1})(1). \tag{5.1}$$

Στο βάρος ένα, οι δύο χαρακτήρες είναι καθολικά διακριτοί, καθώς οι ισοτιμίες τους διαφέρουν, αλλά οι περιορισμοί τους στο GQp συμφωνούν, επειδή χ1(p) = χ2(p) και και οι δύο δεν είναι διακλαδωμένοι στο p. Συνεπώς, ο χαρακτήρας του πηλίκου δεν καθορίζει τις δύο συντεταγμένες του χάρτη πηλίκου. Στην άρτια κυκλοτομική συνιστώσα που χρησιμοποιείται παρακάτω, η περιττή συνιστώσα της καθολικής κλάσης μηδενίζεται. Επομένως, χρειαζόμαστε μόνο την πρώτη συντεταγμένη του πηλίκου και την εξειδίκευση ενός κανονικά κανονικοποιημένου ρυθμιστή πρώτης τάξης.

5.1. Κυκλικές μονάδες και κυκλοτομική συνομολογία. Διατηρούμε τις κυκλοτομικές άλγεβρες και τις συνιστώσες της Ενότητας 2.5 και υποθέτουμε ότι το L περιέχει τις τιμές των χαρακτήρων. Έστω j : GQ Λ ο ταυτολογικός χαρακτήρας που προκύπτει από τον κυκλοτομικό χαρακτήρα και τη συνιστώσα - οι εμφανιζόμενοι αναλυτικοί κύκλος συμπερίληψη Γ Λ κύκλ. × Δουλεύουμε σε ένα σταθερό άρτιο ω^ενω τύποι αντιστοιχούν σε a = 0, και οι άλλες συνιστώσες λαμβάνονται όπως στο Πόρισμα 6.5.

Για να χρησιμοποιήσουμε τον αναλυτικό εκθέτη j που αντιστοιχεί στο μιγαδικό όρισμα 1+j, τραβάμε] , το αντιστρέψτε τη συνήθη αντίστροφη κυκλοτομική παραμόρφωση από την ενέλιξη ι : [z] 1 οποίο εφαρμόζουμε [z ταυτόχρονα στους συντελεστές, τις κλάσεις και τους ρυθμιστές. Η προκύπτουσα παραμόρφωση έχει στρέψη (j) και εξειδικεύεται σε έναν αλγεβρικό εκθέτη j ως προς L(χ). Η στρέψη Tate 1)(1 + j). Ισοδύναμα, το μπορεί να συμπεριληφθεί στην κυκλοτομική σημειογραφία:

$$L(\chi_1^{-1})(1) \otimes_{\Lambda} H\Gamma(j) = L(\chi_1^{-1}) \otimes_{\Lambda} H\Gamma(1+j).$$

Θεωρήστε την μονοδιάστατη αναπαράσταση

$$T\chi_1 = O(\chi_1^{-1})(1)$$

και η κυκλοτομική του παραμόρφωση

$$T\chi_1 = T\chi_1 \otimes_{O\Lambda} cyc(j).$$

Αφού αντιστρέψουμε το p και επεκτείνουμε τις βαθμωτές τιμές στο ΗΓ, θέτουμε

$$V\chi_1 = L(\chi_1^{-1})(1) \otimes_{\Lambda} H\Gamma(j).$$

Το σύστημα Euler των κυκλικών μονάδων δημιουργεί μια κανονική κλάση

$$c(\chi_1) \in H^1(Q, V\chi_1). \tag{5.2}$$

Πριν από την επέκταση των βαθμωτών, προκύπτει από το αντίστροφο όριο των εικόνων Kummer παρακάτω, ακολουθούμενο από την ενέλιξη που μόλις εισαγάγαμε:

$$c(\chi_1) \in \lim_n H^1(Q(\mu_{pn}), T\chi_1).$$

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [BCD+14, §1.1] για τις λεπτομέρειες της κατασκευής και των κανονικοποιήσεων.

Machine Translated by Google

Υπόθεση 5.2. Υποθέτουμε ότι H0 Qp(μp), Tχ1

= 0.

Για τον μη διακλαδωμένο χαρακτήρα που εξετάζεται εδώ, αυτό ισοδυναμεί με χ1(p)≠ 1, και χρησιμοποιούμε αυτήν τη ρητή συνθήκη σε όλο το τοπικό όρισμα.

Έστω S που περιέχει p και όλους τους πρώτους ήμερους αγωγούς, και βάλτε

$$H^1_{Iw}(\mathbb{Z}[1/S], T) := \lim_n H^1(\mathcal{O}_Q(\mu_{p^n})[1/S], T),$$

με τον συγπεριορισμό ως χάρτες μετάβασης, όπου η συνομολογία αντιπροσωπεύει τη συνομολογία Galois χωρίς διακλάδωση εκτός των πρώτων αριθμών πάνω από το S. Υπενθυμίζεται ότι το ιδιότροπο ea της Ενότητας 2.5 επιλέγει τη σταθερή άρτια κυκλοτομική συνιστώσα. Ένα όρισμα ισοτιμίας δίνει το ακόλουθο μηδενικό αποτέλεσμα.
Σημειώστε ότι, εφόσον χ1(p) = χ2(p), η συνθήκη χ2(p)≠ 1 σε αυτήν είναι ισοδύναμη με την Υπόθεση 5.2, και ότι η κλάση κ(f)χ2 που εμφανίζεται στην τελευταία της πρόταση εισάγεται στην §5.3.

Λήμμα 5.3 (Η περιττή συνιστώσα). Έστω Tχ2 = O(χ) Σε κάθε σταθερή άρτια κυκλοτομική $\mathbb{Z}_p^1(1)$ και υποθέτουμε χ2(p)≠ 1.
συνιστώσα, ea$H^1_{Iw}(\mathbb{Z}[1/S], T_{\chi^2})[1/p] = 0$.

Συνεπώς, μια κανονική καθολική εξειδίκευση με διαιρεμένους συντελεστές Wf έχει κ(f)χ2 = 0 σε αυτήν την συνιστώσα.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τη θεωρία Kummer στο μη εξαιρετικό εύρος. Έστω C ο αγωγός του χ2 και θέσουμε Fn = Q(μCpn). Δεδομένου ότι η p-αδική ενότητα Tate της πεπερασμένης ομάδας S-κλάσης του Fn είναι μηδέν, η ακολουθία Kummer ταυτοποιεί την πεπερασμένης βαθμίδας Zp(1)-συνομολογία με την p-αδική ολοκλήρωση των S-μονάδων της. Η τανυστική προσέγγιση με χ επιλέγει τον χ2-ιδιόχωρο $\mathbb{Z}_p^1$ αυτών των μονάδων και λαμβάνουμε ακολουθίες συμβατές με νόρμες πριν αντιστρέψουμε το p. Δεδομένου ότι το χ2 είναι περιττό και η κυκλοτομική συνιστώσα είναι άρτια, αυτή είναι μια συνιστώσα περιττού χαρακτήρα των μονάδων. Οι μονάδες του πεδίου CM Fn δεν έχουν τέτοια συνιστώσα μετά την αφαίρεση των ριζών της μονάδας, και οι p-δυναμικές ρίζες της μονάδας δεν συνεισφέρουν ούτε αυτές, καθώς η ήπια δράση τους είναι τετριμμένη ενώ το χ2 είναι μη τετριμμένο.

Απομένει να εξετάσουμε τις αποτιμήσεις στους πρώτους αριθμούς στο S. Στους πρώτους αριθμούς πάνω από το p, η ήπια ομάδα αποσύνθεσης δρα στη γραμμή χαρακτήρων μέσω του χ2(p)≠ 1, επομένως αυτό το μέρος της μονάδας διαιρέτη έχει μηδενική χ2-προβολή. Για έναν πρώτο ℓ≠ p, η ομάδα αποσύνθεσής του στην κυκλοτομική επέκταση Zp είναι ανοιχτή, αφού το ℓ έχει άπειρη τάξη. Επομένως, σε επαρκώς υψηλά επίπεδα, ο βαθμός υπολοίπου είναι p σε κάθε βήμα και ο κανόνας στη μονάδα αποτίμησης είναι ο πολλαπλασιασμός επί p, επομένως το αντίστροφο όριο έναντι των ολοκληρωτικών p-αδικών αποτιμήσεων είναι μηδέν. Κατά συνέπεια, κάθε συμβατή με κανόνες περιττή ακολουθία S-μονάδων έχει μηδενικές αποτιμήσεις και ανήκει στη συνιστώσα μονάδας, την οποία έχουμε ήδη δει να μηδενίζεται. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό, αφού η ενέλιξη και η επέκταση των βαθμωτών αριθμών που χρησιμοποιούνται στη σύμβασή μας διατηρούν αυτήν τη μηδενισμό.

Η ίδια μη εξαιρετική συνθήκη δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 5.4. Σύμφωνα με την Υπόθεση 5.2, η τοπική ομάδα κοομολογίας Iwasawa

$$H^1_{Iw}(\mathbb{Q}_p, T_{\chi^1}) := \lim_n H^1(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^n}), T_{\chi^1})$$

είναι απαλλαγμένο από τάξη ένα ως προς την επιλεγμένη συνιστώσα του Λcyc[1/p]. Συνεπώς, H1

$$(\mathbb{Q}_p, V_{\chi^1}) \quad H^1_{Iw}(\mathbb{Q}_p, T_{\chi^1}) \quad \Lambda_{cyc,\iota}\,\text{ΗΓ}$$

είναι μια ελεύθερη ΗΓ-μονάδα τάξης ένα.

Απόδειξη. Ο τοπικός τύπος χαρακτηριστικής Iwasawa Euler δείχνει ότι η τάξη είναι ένα. Σύμφωνα με την δηλωμένη υπόθεση, οι ρητές κυκλοτομικές αναλλοίωτες μηδενίζονται, και για τον μη διακλαδωμένο χαρακτήρα πεπερασμένης τάξης που εξετάζεται εδώ, οι δυϊκές αναλλοίωτες επίσης μηδενίζονται όταν χ1(p)≠ 1. Ως εκ τούτου, το τυπικό θεώρημα δομής για την τοπική συνομολογία Iwasawa δίνει ελευθερία έναντι της ρητής συνομολογίας Iwasawa.

Machine Translated by Google

άλγεβρας, δηλαδή, μετά την αντιστροφή του p. Η επέκταση των βαθμωτών αριθμών και η εφαρμογή του ι δίνει τον εμφανιζόμενο ισομορφισμό.

Υπάρχει ένας χάρτης του Κόλμαν

$$\mathrm{Col}_{\chi^{-1}} : H^1(\mathbb{Q}_p, V_{\chi^{-1}}) \to HG \text{ του οποίου} \tag{5.3}$$

οι εξειδικεύσεις δίνονται από τους λογάριθμους Bloch-Kato και τις δυϊκές εκθετικές απεικονίσεις, μαζί με τους συντελεστές παρεμβολής τους. Χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση μετρήσιμης τιμής του χάρτη Coleman του [RR24, Προτάσεις 3.3–3.4], μεταφρασμένη από την παραπάνω ενέλιξη. Έτσι, η κυκλική κλάση μονάδας και η συντεταγμένη Dieudonne είναι σταθερές έτσι ώστε

$$\text{Στήλη}_{\chi^{-1}}(\text{αντίστοιχα } c(\chi^{-1})) = F_{\chi^{-1}}(j) := L_{\pi^{\text{klodlia-haupemeig}}}(\chi^{-1}, 1 + j). \tag{5.4}$$

Οι παράγοντες Euler σε αυτήν την ταυτότητα είναι αυτοί της τυπικής συνάρτησης Kubota-Leopoldt, επομένως δεν υπάρχει επιπλέον παράγοντας κανονικοποίησης. Σε έναν χαρακτήρα πεπερασμένης τάξης ρ του Γ1, η ίδια ταυτότητα διαβάζεται

$$F_{\chi^{-1}}(\rho) = L_{\pi^{\text{klodlia-haupemeig}}}(\chi^{-1}\rho^{-1}, 1). \tag{5.5}$$

Πράγματι, η γραφή $G_\beta(u^s - 1) = L_\rho(u)_{\pi^{\text{klodlia-haupemeig}}}(\beta, 1 - s)$, στρέψη κατά ρ^{-1} αντικαθιστά τη μεταβλητή $1 + T$ με $(1 + T)^{-1}$, όπως στο [SW22, εξισώσεις (2.8)–(2.9)], και αυτή είναι ακριβώς η ενέλιξη στο δικό μας συνομολογική σύμβαση. Παρατηρήστε επίσης ότι, εφόσον το χ^{-1} είναι μη τετριμμένο, το $F_{\chi^{-1}}$ είναι ένα μη μηδενικά φραγμένο μέτρο.

Συμπέρασμα 5.5. Ο χάρτης Coleman (5.3) είναι αμφιμονοσήμαντος.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 5.4, η πηγή του είναι απαλλαγμένη από τάξη ένα ως προς το ολοκληρωτικό πεδίο ορισμού ΗΓ, και η απεικόνιση είναι μη μηδενική από την (5.4). Επομένως, είναι ενέσιμο.

Για να συγκρίνουμε τις καθολικές κλάσεις μέσω των ρυθμιστών τους, χρειαζόμαστε επίσης τον εντοπισμό στο p. ενεστωτική. Δουλεύουμε με την ενότητα που λαμβάνεται από την ίδια συνομολογία Iwasawa:

$$Sh^1 := ea H^1_{Iw}(\mathbb{Z}[1/S], T_{\chi^{-1}})[1/p] \to \Lambda_{L,\iota} HG \to H^1(\mathbb{Q}, V_{\chi^{-1}}).$$

Εδώ και παρακάτω, το ΗΓ αναφέρεται στο σταθερό στοιχείο. Αυτή η ενότητα περιέχει την κλάση κυκλικής μονάδας και, σύμφωνα με την Υπόθεση 5.9(i), την προβαλλόμενη εξειδίκευση Kato. Η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι μια καθολική κλάση σε αυτήν καθορίζεται από την εικόνα Coleman.

Πρόταση 5.6. Υποθέστε ότι το χ^{-1} είναι μη τετριμμένο και άρτιο, και $\chi^{-1}(p) \neq 1$. Τότε το $S_{\chi^{-1}}$ είναι απαλλαγμένο από στρέψη βαθμού ένα, και

$$\mathrm{Col}_{\chi^{-1}} \text{ resp} : S_{\chi^{-1}} \to HG$$

είναι ενεστωτική.

Απόδειξη. Έστω C ο αγωγός του χ^{-1} και θέτω $F_n = \mathbb{Q}(\mu_{Cp^n})$. Η θεωρία Kummer ταυτοποιεί την καθολική ενότητα Iwasawa με την αντίστοιχη συνιστώσα χαρακτήρα των μονάδων S συμβατών με νόρμες. Όπως στο Λήμμα 5.3, το αντίστροφο όριο των ενοτήτων αποτίμησης σε πρώτους αριθμούς μακριά από το p είναι μηδέν, ενώ το χ^{-1}-μέρος στο p μηδενίζεται επειδή $\chi^{-1}(p) \neq 1$, άρα παραμένουν μόνο μονάδες. Επιπλέον, επειδή ο ήπιος χαρακτήρας είναι μη τετριμμένος, οι ρίζες p-δύναμης της μονάδας δεν συνεισφέρουν επίσης.

Το θεώρημα του Leopoldt για τα αβελιανά πεδία F_n, λόγω του Brumer [Bru67], καθιστά τον εντοπισμό αυτών των μονάδων στο γινόμενο των συμπληρώσεων στο p ενέσιμο μετά από τενσοράρισμα με $\mathbb{Q}_p$. Στην πραγματικότητα, αυτός ο εντοπισμός είναι ήδη ενέσιμος στο $O_{F_n}^\times \otimes \mathbb{Z}_p$: ο πυρήνας του είναι πεπερασμένος, επομένως περιέχεται στις ρίζες p-δύναμης της μονάδας, οι οποίες εισάγουν στις τοπικές μονάδες. Επομένως, η ενέσιμη φύση διατηρείται κατά τη μετάβαση στο αντίστροφο όριο. Λαμβάνοντας συστήματα συμβατά με νόρμες και τη συνιστώσα χαρακτήρα, και χρησιμοποιώντας το λήμμα του Shapiro για να προσδιορίσουμε τον ημιτοπικό στόχο, δίνεται μια ένεση στο $ea H^1_{Iw}(\mathbb{Q}_p, T_{\chi^{-1}})[1/p]$. Αυτός ο στόχος είναι απαλλαγμένος από βαθμό ένα από το Λήμμα 5.4, και ο εντοπισμός παραμένει ενέσιμος υπό την επίπεδη επέκταση σε τοπικά αναλυτικές κατανομές. Συνεπώς, το $S_{\chi^{-1}}$ είναι απαλλαγμένο από στρέψη βαθμού το πολύ ένα. η κλάση κυκλικών μονάδων έχει μη μηδενικό ρυθμιστή από το (5.4), επομένως το

Machine Translated by Google

Η κατάταξη είναι ακριβώς ένα. Τέλος, η σύνθεση του εντοπισμού με τον αμφιλεγόμενο χάρτη Coleman αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

5.2. Η αναλυτική είσοδος στην αμοιβαιότητα Kato. Η αναλυτική ταυτότητα που χρησιμοποιείται παρακάτω περιλαμβάνει τρεις παράγοντες: μια αρθρωτή p-αδική L-συνάρτηση που μεταβάλλεται κυκλοτομικά, έναν βοηθητικό αρθρωτό παράγοντα που εξαρτάται μόνο από το βάρος και έναν συζυγή παράγοντα. Σύμφωνα με το [PR25, §4.3], περιγράφουμε τα ορίσματά τους ρητά. Συμβολίζουμε τους βοηθητικούς χαρακτήρες με (ϑ1, ϑ2) για να τους διακρίνουμε από τα συστατικά (χ1, χ2) της f.

Για τις σταθερές συνομολογικές περιόδους $\gamma_{\varphi}^{\pm}$, αφήνω

$$\mathrm{Lp}(f, \vartheta i) \quad \mathrm{AU} \quad \mathrm{LH}\Gamma \text{ είναι}$$

οι στριμμένες συναρτήσεις Mazur-Kitagawa, και γράψτε Lp(f) για την μη στριμμένη. Το όρισμά τους j ακολουθεί τη σύμβαση εκθέτη της Ενότητας 5.1: για κλασικό βάρος k 2 παρεμβάλλουν L(fk ϑi 1 +j) για 0 j k 2. Αντίθετα, η μεταβλητή Rankin s παρακάτω αντιπροσωπεύει το μιγαδικό L-όρισμα, έτσι ώστε ένας αρθρωτός παράγοντας στο μιγαδικό όρισμα s γράφεται Lp(f, ϑi)(k, s 1).

Η συζυγής συνάρτηση Lp(Ad f) AU συγκρίνει τις κανονικοποιήσεις περιόδου Petersson και συνομολογικής περιόδου, όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 2.4, και το πιθανό μηδέν της στο f είναι ακριβώς ο λόγος για τον οποίο τη διατηρούμε στον τύπο. Έστω E = E(ϑ1, ϑ2) η βοηθητική συνήθης οικογένεια Eisenstein, βάρους ℓ. Ο φορμαλισμός Artin δίνει τα δύο μιγαδικά ορίσματα s και s ℓ + 1 στο γινόμενο Rankin με fk· συγκρίνετε [BD14, Θεώρημα 3.4] και [PR25, Πρόταση 4.4].

Γράψτε $\Lambda_{\pi}^{\text{Adjoint Ansatz}}(f, E)(k, \ell, s)$ για την τριμεταβλητή p-αδική L-συνάρτηση Hida-Rankin, με f ως κυρίαρχη οικογένεια και s το σύνθετο όρισμα Rankin. Χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση της οικογένειας Eisenstein του [PR25, §4.3]. για τη γενική σύμβαση παρεμβολής Hida-Rankin και την εξάρτησή της από την κυρίαρχη μεταβλητή, βλέπε [Das16, §3.6]. Οι παράγοντες περιόδου και οι παράγοντες tame Euler που εισάγονται στη σύγκριση με τις συναρτήσεις Mazur-Kitagawa διατηρούνται παρακάτω.

Περιορίστε τις μεταβλητές Rankin στην επιφάνεια

$$s = s(k, \ell) := + \ell. \quad \frac{k \quad 1}{2} \tag{5.6}$$

Στη συνέχεια, τα δύο μιγαδικά ορίσματα είναι (k 1)/2 + ℓ και (k + 1)/2, τα οποία στο k = 1 γίνονται ℓ και 1. Οι εκθέτες τους είναι s 1 και (k 1)/2. Παρατηρήστε ότι κατά μήκος αυτής της επιφάνειας ο δεύτερος συντελεστής εξαρτάται μόνο από το βάρος του f. Σε κλασικά σημεία παίρνουμε k περιττό, έτσι ώστε τα δύο εμφανιζόμενα ορίσματα να είναι ακέραιοι αριθμοί. Σε έναν δίσκο σταθερού βάρους, το μισό βάρος είναι ο αναλυτικός χαρακτήρας z exp((k 1) logp (z)/2) του Γ1. Τα πεπερασμένα στοιχεία χαρακτήρων παραμένουν σταθερά. Τα κλασικά σημεία αυτής της ισοτιμίας στο εύρος παρεμβολής Rankin σχηματίζουν το σύνολο παρεμβολής.

Πρόταση 5.7. Με αυτές τις συμβάσεις, υπάρχει ένας μερομορφικός παράγοντας περιόδου d Frac(AU) που εξαρτάται μόνο από το k έτσι ώστε

$$\begin{aligned} &\Lambda_{\pi}^{\text{Adjoint Ansatz}}(f, E)\, k, \ell, s(k, \ell)\, \mathrm{Lp}(\mathrm{Ad}\, f)(k) \\ &= d(k)\, \mathrm{Lp}(f, \vartheta 1)\, k, \quad \frac{k \quad 3}{2} + \ell\, \mathrm{Lp}(f, \vartheta 2)\, k, \quad \frac{k \quad 1}{2} \quad , \end{aligned} \tag{5.7}$$

μέχρι τους σαφείς παράγοντες Euler στους πρώτους αριθμούς που διαιρούν τα ήμερα επίπεδα.

Απόδειξη. Σε κλασικά σημεία στο εύρος παρεμβολής Rankin, η μιγαδική παραγοντοποίηση είναι το γινόμενο των στρεβλώσεων στο s και s ℓ+1, και η σύγκριση των τύπων παρεμβολής στο [PR25, Πρόταση 4.4], σύμφωνα με το [BD14, Θεώρημα 3.4], λαμβάνει υπόψη την συζυγή περίοδο και τους ήμερους παράγοντες. Περιοριζόμενοι στην (5.6) και αντικαθιστώντας κάθε μιγαδικό αρθρωτό όρισμα με τον εκθέτη του, δηλαδή, αφαιρώντας 1, λαμβάνουμε την εμφανιζόμενη ταυτότητα στο κλασικό σύνολο παρεμβολής, και επομένως, με αναλυτική συνέχεια, ως ταυτότητα μερομορφικών συναρτήσεων στην οικογένεια.

Machine Translated by Google

Για να λάβουμε τον μη στριμμένο κυκλοτομικό παράγοντα που χρησιμοποιείται παρακάτω, λαμβάνουμε ϑ1 = 1 και ορίζουμε το ϑ2 με την απαιτούμενη ισοτιμία. Στη συνέχεια, τραβάμε προς τα πίσω την επιφάνεια κατά s = 1 + j, ισοδύναμα ℓ = j + (3 k)/2, και βάζουμε

$$\Lambda\, \pi^{\text{βοηθητικό}}(f)(k) := \mathrm{Lp}(f, \vartheta 2)\, k, \qquad \frac{k\ \ 1}{2}\ .$$

Ο πρώτος παράγοντας είναι τότε Lp(f)(k, j), ενώ ο βοηθητικός παράγοντας εξαρτάται μόνο από το k. Συντομεύοντας την έλκουσα προς τα πίσω συνάρτηση Rankin με την ίδια σημειογραφία, ο τύπος γίνεται

$$\pi^{\text{μηγάλο}}(f, E)\mathrm{Lp}(\mathrm{Ad}\, f) = \mathrm{EN}\, L\ \pi^{\text{βοηθητικό}}(\sigma\tau)\mathrm{Lp}(\sigma\tau), \tag{5.8}$$

όπου το EN συλλέγει τους ήμερους παράγοντες και το d. Αυτή είναι μια γενική ταυτότητα μερομορφικών συναρτήσεων και το ζήτημα της κανονικότητάς της στο f εξετάζεται παρακάτω.

Υπόθεση 5.8 (Απλή-μηδενική κανονικοποίηση). Στις ενότητες και τις βάσεις σταθερής συνομολογικής περιόδου αυτής της υποενότητας, το EN είναι κανονικό στο xf , (5.9) $\mathrm{ord}_{X=0} L$ και

$$\mathrm{ord}_{X=0}\, \mathrm{Lp}(\mathrm{Ad}\, f) = 1, \qquad \pi^{\text{βοηθητικό}}(\sigma\tau)\ \ 1.$$

Αυτή η υπόθεση αφορά την επιλεγμένη αναλυτική κανονικοποίηση και χρησιμοποιείται στις Προτάσεις 5.11 και 5.13, των οποίων οι υποθέσεις περί αγωγού είναι πιο γενικές από εκείνες της Ενότητας 6. Στο πλαίσιο του κοινού αγωγού, το Πόρισμα 6.10 την παρακάμπτει αντιμετωπίζοντας τον πλήρη παράγοντα αμοιβαιότητας ταυτόχρονα. Παρατηρήστε ότι οι αλλαγές βάσης εντός μιας μονάδας σταθερής περιόδου διατηρούν τις τάξεις μηδενισμού, ενώ η αλλαγή της μονάδας κατά δύναμη του X μπορεί να τις τροποποιήσει.

Υπό αυτήν την υπόθεση, το πηλίκο έχει μια μετακινούμενη μοναδικότητα, και θέτουμε

$$\mathrm{B}\lambda\ .:= \frac{\Lambda\text{οξ}\,(f)}{\pi^{\text{Lp(Διαφήμιση f)}}}\ xf = \frac{\rho\varepsilon}{\int} L\ \mathrm{aux}\ \pi(f)\, dX \Big|_{X=0}}{\rho\varepsilon} \int \mathrm{Lp}(\mathrm{Ad}\, f)\, dX \Big|_{X=0}}\ . \tag{5.10}$$

Αυτή η αναλογία δεν εξαρτάται από την επιλογή της τοπικής παραμέτρου X και μηδενίζεται όταν η βοηθητική συνάρτηση έχει τάξη μεγαλύτερη από ένα, μια περίπτωση που επιτρέπεται στις παρακάτω συγκρίσεις.

5.3. Κλάσεις Kato και η εξειδίκευση βάρους-ένα. Τώρα θα στραφούμε στην εξειδίκευση των κλάσεων Kato στο f. Ο διαχωρισμός της αναπαράστασης βάρους-ένα μας επιτρέπει να προβάλουμε μια εξειδικευμένη κλάση στα δύο συστατικά στοιχεία της και να συγκρίνουμε τη συνιστώσα χ1 με κυκλικές μονάδες. Χρησιμοποιούμε την κλάση με βοηθητικούς χαρακτήρες του [PR25, Ορισμός 4.6], κανονικοποιημένους όπως στην Πρόταση 4.9 της παρ. βλ. Ο νόμος αμοιβαιότητάς της περιλαμβάνει τη βοηθητική τιμή Mazur-Kitagawa και τον παράγοντα συζυγούς περιόδου που εισήχθη παραπάνω.

Για να πραγματοποιήσετε αυτήν τη σύγκριση, ορίστε μια οικογένεια μονάδων συντελεστή Wf με οπτική ίνα

$$\mathrm{Wf}\quad L(\chi\ \ 1^{1})(1)\quad L(\chi\ \ 2^{1})(1),$$

και τις βάσεις των δύο γραμμών χαρακτήρων του. Στη ρύθμιση κοινού αγωγού αυτή η υλοποίηση είναι cpt διαθέσιμη: αν το V δηλώνει την πλήρως εντοπισμένη συμπαγή ενότητα δύο τάξεων της οικογένειας βοηθητικών, το f0 [SW21, Θεώρημα 1.5] δίνει τον απαιτούμενο διαχωρισμό για

$$\text{Τι στο καλό } f := V\, f0^{\mathrm{cpt}}\quad L(\chi 1)^{*}(1).$$

Σε αυτήν την περίπτωση, λαμβάνουμε Wf = Wtw και υποθέτουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας διαιρεμένης υλοποίησης για γενικούς αγωγούς. Η εξειδίκευση και η προβολή χαρακτήρων δίνουν στη συνέχεια χάρτες στην συνομολογία. Για να τις εφαρμόσουμε στην κλάση Kato, πρέπει να είναι κανονική σε αυτήν την υλοποίηση στο X = 0.

Με τους βοηθητικούς χαρακτήρες και τις βάσεις περιόδου που καθορίστηκαν παραπάνω, γράψτε την κλάση της μεταφερόμενης οικογένειας ως

$$\kappa(f)\quad \mathrm{H1}\ Q, \mathrm{Wf}\quad \mathrm{LH}\Gamma(j)\ [1/X]. \tag{5.11}$$

Machine Translated by Google

Εδώ έχουμε κάνει την αλλαγή της κυκλοτομικής μεταβλητής της Ενότητας 5.1. Η σημειογραφία [1/X] επιτρέπει στην μεταφερόμενη κλάση να έχει έναν πόλο πεπερασμένης τάξης στο f. η ίδια η ενότητα του συντελεστή ορίζεται στο f.

Επιλέξτε μια κανονική βάση της ευθείας Dieudonne του πηλίκου W f , τάξης ενός . Γράφουμε: H1 Qp, W LHΓ(j) AU

(5.12) L f LHΓ φα

για τον ρυθμιστή σε αυτή τη βάση. Επιτρέπουμε έναν σταθερό κυκλοτομικό παρονομαστή, ανεξάρτητο από το X, και συμπεριλαμβάνουμε προβολή στο συνηθισμένο πηλίκο στην καμπύλη συμβολισμού. Με αυτήν τη σύμβαση, οι παράγοντες συμφωνίας και συνομολογικής περιόδου εμφανίζονται στην αναλυτική πλευρά του νόμου της αμοιβαιότητας. Η ακόλουθη υπόθεση καθορίζει την κανονικότητα και τη συμβατότητα που απαιτούνται στο f.

Υπόθεση 5.9 (Εξειδίκευση της κλάσης Kato). Για την υλοποίηση του συντελεστή και τις κανονικοποιήσεις που καθορίστηκαν παραπάνω, υποθέστε ότι: (i)

Κανονικότητα. Η γενική κλάση (5.11) είναι η εικόνα μιας κλάσης στην κυκλοτομική συνομολογία Iwasawa της υλοποίησης του σταθερού συντελεστή, μη διακλαδωμένης εκτός ενός σταθερού πεπερασμένου συνόλου S, χωρίς να αντιστρέφεται το X.

(ii) Εξειδίκευση του ρυθμιστή. Ο χάρτης (5.12), σε κανονική βάση Dieudonne, ορίζεται στην επιλεγμένη ενότητα τοπικής συνομολογίας και εξειδικεύεται σε κάθε κανονική κλάση στον χάρτη Coleman πρώτης τάξης (5.3), όπου οι δύο γραμμές χαρακτήρων της διαιρεμένης ίνας αναγνωρίζονται τοπικά, αφού χ1 και χ2 συμφωνούν στο GQp , και το Colχ1 εφαρμόζεται και στις δύο προβολές μέσω αυτής της αναγνώρισης. Το συνηθισμένο πηλίκο στην διαιρεμένη τοπική ίνα είναι ℓ0 = af pr1 +bf pr2 ,

af , bf L, af≠ 0. (iii)

Αμοιβαιότητα και περίοδοι. Στον κυστειδικό τόπο, η μεταφορά της αναπαράστασης, η κυκλοτομική μεταβλητή και οι περίοδοι δίνουν την (5.15). Ο παράγοντας EN περιλαμβάνει όλους τους εξαρτώμενους από το βάρος παράγοντες περιόδου που εισάγονται από αυτή τη μεταφορά, οι οποίοι μπορεί να είναι μερομορφικοί. Η modular συνάρτηση χρησιμοποιεί την επιλεγμένη συνομολογική γραμμή περιόδου· η σύγκρισή της με συμπαγείς περιόδους εξαρτάται μόνο από το βάρος.

Αυτές οι συνθήκες συνδέουν την επιλεγμένη υλοποίηση διαίρεσης με την κατασκευή του Kato και τον νόμο αμοιβαιότητάς της: (i) μας επιτρέπει να εξειδικεύσουμε την κλάση, (ii) υπολογίζει την εικόνα Coleman της και (iii) εκφράζει αυτήν την εικόνα με όρους αρθρωτών p-αδικών L-συναρτήσεων.

Δεδομένου ότι η συνήθης κατασκευή ζήτα λαμβάνει τιμές στην ανοιχτή συνομολογία [FK24, §3.2], η συνθήκη (i) απαιτεί η μεταφορά στην διαιρεμένη υλοποίηση να διατηρεί την κανονικότητα. Για τις κλάσεις Beilinson-Flach, το αντίστοιχο πέρασμα παρέχεται από τους συντελεστές άντωσης προς παραβολικές παραβολές στο [BDV22, Λήμμα 2.4], το οποίο τοποθετεί τις κλάσεις στην διαιρεμένη υλοποίηση από την Πρόταση 2.2 της παρ. βλ. Στο πλαίσιό μας, ο προσημασμένος χάρτης συστροφής της Ενότητας 6.2 συγκρίνει τις γραμμές περιόδου που χρησιμοποιούνται στο (iii), ενώ η κανονικότητα της μεταφερόμενης συνομολογίας είναι το περιεχόμενο του (i).

Στην άρτια κυκλοτομική μας συνιστώσα, ο ρυθμιστής παρέχει επίσης έναν τρόπο επαλήθευσης του (i). Υποθέστε χ1(p)≠ 1, και έστω M η ενότητα συνομολογίας της οικογένειας Iwasawa, μη διακλαδωμένη εκτός του S, με τους επιλεγμένους συντελεστές και τις επίπεδες βαθμωτές επεκτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω. Για μια γενική κλάση στο M[1/X], η συνθήκη (ii) δίνει το

κριτήριο (5.13) κ(f) imM M[1/X] L (locp κ(f)) δεν έχει πόλο στο X = 0.

Πράγματι, ο πολλαπλασιασμός με X στην καθολική κυκλοτομική ενότητα συντελεστή είναι αμφιμονοσήμαντος. Η ακολουθία συνομολογίας επομένως δίνει

M/XM Sχ1 Sχ2 , όπου

το Sχ2 ορίζεται όπως στην §5.1 με χ2 στη θέση του χ1. Η επίπεδη επέκταση από τις φραγμένες ενότητες Iwasawa σε κατανομές, και οποιαδήποτε σταθερή κυκλοτομική εντόπιση, διατηρούν αυτήν την ένεση. Σύμφωνα με το Λήμμα 5.3, ο δεύτερος αθροιστής μηδενίζεται. στην πρώτη, ο εξειδικευμένος ρυθμιστής είναι ενέσιμος από το (ii) και την Πρόταση 5.6. Τώρα ας υποθέσουμε ότι το κ(f) έχει έναν πόλο τάξης n > 0. Ένας εκπρόσωπος του Χηκ(f) στο M έχει μη μηδενική εξειδίκευση, και επομένως μη μηδενικό εξειδικευμένο ρυθμιστή. Εάν το

Machine Translated by Google

ρυθμιστής του κ(f) ήταν κανονικός, η ίδια τιμή θα ήταν μηδέν, αφού είναι η εξειδίκευση του XnL (locp κ(f)). Αυτό αποδεικνύει την συνέπεια στην (5.13)· το αντίστροφο προκύπτει από το (ii).

Μόλις η κλάση γίνει κανονική, (ii) ταυτοποιεί τον εξειδικευμένο ρυθμιστή της με την εικόνα Coleman του η χ1-συνιστώσα του . Η περιττή συνιστώσα μηδενίζεται από το Λήμμα 5.3, άρα =

(5.14) $$L_f \ (\text{locp } \kappa(f)) \quad _{xf} \ af \ \text{Col}\chi 1 \ (\text{αντίστοιχα } \kappa(f)\chi 1 \ ).$$

Η βαθμωτή μεταβλητή af καταγράφει το συνηθισμένο πηλίκο στην επιλεγμένη βάση χαρακτήρων.

Η Υπόθεση 5.9(i) μας επιτρέπει να εργαστούμε με την εξειδίκευση της αρχικής κλάσης Kato. Αν αντίθετα η κλάση έχει έναν πόλο τάξης n > 0 στο M[1/X], το φυσικό αντικείμενο που πρέπει να ληφθεί υπόψη είναι η εξειδίκευση του Xnκ(f), ακολουθούμενη από την προβολή χαρακτήρων. Υπό τις ίδιες υποθέσεις για την κυκλοτομική συνιστώσα και τον ρυθμιστή όπως στην (5.13), η εικόνα Coleman είναι a επί τον συντελεστή του X n στον βαθμωτό ρυθμιστή. Αυτό θα οδηγούσε σε μια σύγκριση $^{1}_{\varphi\acute{\alpha}}$ για τον κύριο όρο, με την υλοποίηση του συντελεστή και την παράμετρο X σταθερές. Το ίδιο το κριτήριο δεν καθορίζει εάν υπάρχει πόλος. Εδώ εξετάζουμε την κανονική περίπτωση. Η Πρόταση 5.11 επαληθεύει την κανονικότητα υπό την Υπόθεση 5.8 και τις δηλωμένες συνθήκες συμβατότητας.

Για να υπολογίσουμε τον ρυθμιστή, χρησιμοποιούμε τον νόμο της αμοιβαιότητας με την κανονικοποίηση περιόδου στο (iii).

Πρόταση 5.10. Με την ομαλοποίηση στο μέρος (iii) της υπόθεσης εξειδίκευσης, η αμοιβαία ταυτότητα της οικογένειας είναι

(5.15) $$L_f \quad \text{locp } \kappa(f) \ Lp(\text{Ad } f) = EN \ L \quad _{\pi^{\text{βοηθητικό}}}(\sigma\tau)Lp(\sigma\tau).$$

Απόδειξη. Στον κυστειδικό τόπο, ο ρητός νόμος αμοιβαιότητας του Kato και η σύγκριση περιόδων δίνουν αυτήν την ταυτότητα με τη μορφή [PR25, Πρόταση 4.9] (βλ. επίσης [Kat04, Och03, BB22]), και το μέρος (iii) ταυτοποιεί τους μεταφερόμενους όρους της με τις επιλεγμένες συναρτήσεις και βάσεις μας. Η ισότητα στον κυστειδικό τόπο δίνει στη συνέχεια τη μερομορφική ταυτότητα ως προς το U. Όταν ισχύουν τα (i) και (ii), ο ρυθμιστής στα αριστερά είναι κανονικός στο f.

Για μια κανονική κλάση Kato, η εξειδίκευση ακολουθούμενη από προβολή δίνει

$$\kappa(f)\chi 1 \quad H1 \ (Q, V\chi 1 \ ). \quad (5.16)$$

Έχει τους ίδιους συντελεστές με την κλάση κυκλικών μονάδων c(χ1) της Ενότητας 5.1. Σύμφωνα με την Υπόθεση 5.8, τόσο ο συζυγής όσο και ο βοηθητικός παράγοντας στην (5.15) μηδενίζονται στο f. Η ακύρωση του κοινού παράγοντα τους X δίνει μια κανονική έκφραση για τον ρυθμιστή. Αυτό αποδεικνύει την κανονικότητα της κλάσης από την (5.13) και υπολογίζει την εξειδίκευσή της.

Πρόταση 5.11 (Γενικοί αγωγοί). Υποθέστε τα μέρη (ii) και (iii) της Υπόθεσης 5.9 και τις Υποθέσεις 5.2 και 5.8. Εάν η γενική κλάση Kato ανήκει στο M[1/X] για την υλοποίηση διαίρεσης που καθορίστηκε παραπάνω, τότε επεκτείνεται κανονικά στο X = 0, και

(5.17) $$\text{Col}\chi 1 \ \text{αντί } \kappa(f)\chi 1 = a \quad _{f \ \text{Βλ. EN}}^{1}(f)Lp(f),$$

όπου Lp(f) := Lp(f) |xf ΗΓ και af είναι η βαθμωτή αριθμητική τιμή συντεταγμένων-πηλίκου στο μέρος (ii) της υπόθεσης.

Απόδειξη. Γράψτε Lp(Ad f) = Xa(X) και L aux (f) = Xb(X), με a(0)≠ 0. Η μερομορφική αμοιβαία ταυτότητα δίνει

$$\Lambda_{\varphi\acute{\alpha}} \ (\text{locp } \kappa(f)) = EN \ Lp(f). \ \frac{b(X)}{a(X)}$$

Το δεξί του μέλος είναι κανονικό: το EN είναι κανονικό σύμφωνα με την Υπόθεση 5.8, και η αρθρωτή συνάρτηση είναι αναλυτική στις σταθερές συνομολογικές περιόδους της §5.2. Επομένως, το κριτήριο (5.13) δίνει κανονικότητα της κλάσης. Η αξιολόγηση στο X = 0 δίνει

$$L_f \ (\text{locp } \kappa(f)) \quad _{xf} = \frac{\beta(0)}{\alpha(0)EN \ (\sigma\tau)Lp(\sigma\tau).}$$

Machine Translated by Google

Το πηλίκο b(0)/a(0) είναι Cf από την (5.10), και το μέρος (ii) προσδιορίζει την αριστερή πλευρά με το af επί τον ρυθμιστή κυκλικής μονάδας της προβαλλόμενης κλάσης.

Παρατήρηση 5.12. Η κλάση στην Πρόταση 5.11 προκύπτει εξειδικεύοντας την κ(f) και προβάλλοντας προς τη συνιστώσα χ1. Ο λόγος των παραγώγων (L aux (f))′ (0)

$$H\,Cf \frac{\pi}{= (Lp(Ad\ f))'(0)}$$

προκύπτει από την ακύρωση του κοινού μηδενός των δύο αναλυτικών παραγόντων. Εάν ο βοηθητικός παράγοντας έχει μηδενικό ανώτερης τάξης, τότε Cf = 0, όπως επιτρέπεται στην πρόταση και στην παρακάτω σύγκριση.

5.4. Σύγκριση με κυκλικές μονάδες. Μπορούμε τώρα να συγκρίνουμε τις (5.4) και (5.17), διατηρώντας τον πραγματικό ρυθμιστή κυκλικής μονάδας Fχ1 .

Πρόταση 5.13 (Σύγκριση για γενικούς αγωγούς). Σύμφωνα με τις υποθέσεις της Πρότασης 5.11, έχουμε

(5.18) $$c(\chi 1)\ af\ F\chi 1 \quad \frac{Cf\ EN\ (f)\ Lp(f)\ \kappa(f)\chi 1 =}{}$$

στο Sχ1 ΗΓ ΚΓ.

Αν το πηλίκο στο δεξί μέλος ανήκει στο ΗΓ, τότε η ισότητα ισχύει ήδη στο Sχ1 .

Απόδειξη. Με τον ρητό νόμο της αμοιβαιότητας για κυκλικές μονάδες,

$$\text{Στήλη}\chi 1 \text{ αντίστοιχα } c(\chi 1) = F\chi 1 .$$

Από την άλλη πλευρά, η Πρόταση 5.11 δίνει

$$\text{Col}\chi 1 \text{ αντί } \kappa(f)\chi 1 = a \quad {}_{\varphi\acute{a}}^{1}\ CfEN\ (f)Lp(f).$$

Επομένως, και οι δύο πλευρές της (5.18) έχουν την ίδια εικόνα ως προς Colχ1 , και επειδή αυτός ο μορφισμός είναι ενέσιμος ως προς το Sχ1 σύμφωνα με την Πρόταση 5.6, το αποτέλεσμα ακολουθεί.

Ο τύπος (5.18) είναι η σύγκριση που λαμβάνουμε υπό τις δηλωμένες υποθέσεις, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε καμία παραγοντοποίηση σε p-αδικές L-συναρτήσεις Dirichlet. Ο συντελεστής του περιέχει το πηλίκο

(5.19) $$\frac{Lp(f)}{F\chi 1} = \frac{Lp(f)}{LKL_{\pi}(\chi 1,\ 1 + j)} .$$

Ο φορμαλισμός Artin υποδηλώνει ότι ο πρώτος παράγοντας Dirichlet θα πρέπει να ακυρώνεται, αφήνοντας μια συνάρτηση συνδεδεμένη με τον άλλο χαρακτήρα Eisenstein. Στην Ενότητα 6 κάνουμε αυτή τη δήλωση ακριβή στο πλαίσιο του κοινού αγωγού, διαχωρίζοντας τον αναλυτικό υπολογισμό από τη σύγκριση περιόδων που απαιτείται για την εφαρμογή του εδώ. Η είσοδος εξειδίκευσης για την κλάση Kato διατηρείται, αλλά η υπόθεση για τον κύριο όρο του συζυγούς παράγοντα αφαιρείται.

Τέλος, παρατηρήστε ότι εάν χ1(p) = 1, η τοπική υπόθεση που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω αποτυγχάνει. Σε αυτήν την περίπτωση, μια σύγκριση κατ' εξαίρεση μηδενισμού θα απαιτούσε ξεχωριστή επεξεργασία της τοπικής στρέψης και της σχετικής p-μονάδας ή της εκτεταμένης κλάσης συνομολογίας, και δεν επιδιώκουμε αυτήν την επέκταση εδώ.

6. Παραγοντοποίηση Artin και συμπαγείς περίοδοι

Αποδεικνύουμε το Θεώρημα A αξιολογώντας το συμπαγές μέτρο του αρθρωτού συμβόλου στο σημείο ακανόνιστου βάρους-ένα. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν μιγαδικές κρίσιμες τιμές σε αυτό το βάρος, η παραγοντοποίηση πρέπει να προέρχεται από την ίδια την συνομολογική κατασκευή.

Γράψτε την f ως μια ήπια συστροφή μιας βοηθητικής μορφής f0 με ένα τετριμμένο συστατικό. Αρχικά κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο χάρτη των συμπαγών μονάδων περιόδου πάνω στον δακτύλιο βαρών. Ο εντοπισμένος χάρτης Sharifi μετατρέπει στη συνέχεια τα στριμμένα αρθρωτά σύμβολα της f0 σε γινόμενα κυπέλλου κυκλοτομικών μονάδων. Η τοπική αμοιβαιότητα αξιολογεί αυτά τα γινόμενα κυπέλλου ως γινόμενο δύο αθροισμάτων, δίνοντας τους δύο παράγοντες Kubota-Leopoldt. Η μη μηδενική τους κατάσταση δείχνει επίσης ότι ο χάρτης συστροφής ε

Machine Translated by Google

ισομορφισμός στο βάρος ένα. Αφού αποδείξουμε την παραγοντοποίηση, συγκρίνουμε τις ενότητες περιόδου και επιστρέφουμε στις κλάσεις Kato. Μόνο που αυτή η τελευταία εφαρμογή χρησιμοποιεί την Υπόθεση 5.9.

6.1. Η ρύθμιση κοινού αγωγού. Σε όλη αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι p 5, και αφήνουμε χ1 και χ2 να είναι πρωτόγονοι χαρακτήρες Dirichlet του ίδιου αγωγού M > 1, με χ1 άρτιο και χ2 περιττό. Υποθέτουμε περαιτέρω ότι (6.1) p Mφ(M), χ1(p) = χ2(p) = α, χ := χ1χ Μας ενδιαφέρει η μορφή f =

E1(χ1, χ2) ord, της οποίας το ελάχιστο επίπεδο tame είναι M2 . Για να τη $_2^1$ είναι το πρωτόγονο του αγωγού M.

συσχετίσουμε με τη ρύθμιση Shih-Wang, θέτουμε η = χ1 και θεωρούμε τη βοηθητική μορφή

$$f0 = E1(1, \chi \quad 1)^{\text{όρδος}}, \quad \text{ώστε} \quad f = f0 \quad \eta.$$

Τα συστατικά του f0 είναι 1 και χ, γεγονός που τοποθετεί το f0 στο πλαίσιο της σύγκρισης Sharifi του [SW21]. Επιπλέον, χ(p) = 1, άρα βρισκόμαστε στην εξαιρετική τους περίπτωση βάρους-ένα. (Στο δυϊκό-(ℓ),
Σύμφωνα με τη σύμβαση Hecke της παρ. σελ., ο άρτιος χαρακτήρας Θ = χω δίνει τις ιδιοτιμές 1 + χ, οι οποίες εξηγούν ^{1} το αντίστροφο στον ορισμό του f0.) Η συστροφή με τον άρτιο χαρακτήρα η ανακτά τα συστατικά χ1 και χ2 της f.

Οι υποθέσεις του [SW21, Θεώρημα 1.2] ικανοποιούνται: Το Θ είναι πρωτόγονο και άρτιο του αγωγού M p, p 5, p Mφ(M), και χ(p) = 1. Ομοίως, η γεωμετρική είσοδος του [BDP22, Θεώρημα A(i)] απαιτεί ακριβώς ότι το χ είναι πρωτόγονο και περιττό και ότι χ(p) = 1. Δεδομένου ότι εργαζόμαστε μετά από εντοπισμό στο χαρακτηριστικό μηδέν, δεν απαιτείται καμία υπόθεση ολοκληρωτικού Gorenstein. Παρατηρήστε επίσης ότι δεν υποθέτουμε α≠ 1 εδώ: οι υπολογισμοί στρέψης και αμοιβαιότητας παρακάτω χρησιμοποιούν μόνο χ(p) = 1, ενώ η συνθήκη α≠ 1 είναι απαραίτητη για τη σύγκριση με κυκλικές μονάδες, και την επιβάλλουμε ρητά στην §6.6. Όταν α = 1, ο δεύτερος παράγοντας στο Θεώρημα A έχει ένα τετριμμένο μηδέν στο j = 0, το οποίο είναι συμβατό με τον τύπο.

Οι συνήθεις ιδιοτιμές των f0 και f είναι 1 και α, αντίστοιχα. Έστω f0 ο κυστιδικός συνηθισμένος κλάδος μέσω του f0, και ορίστε f = f0 η. Από το [BDP22, Θεώρημα A(i)], ο κλάδος f0 είναι ´etale ως προς τον χώρο βαρών, επομένως μετά τη διεύρυνση του L, εάν είναι απαραίτητο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο ολοκληρωμένο τοπικό δακτύλιο βαρών A = L[[X]] και για τους δύο κλάδους, με το X = 0 να αντιστοιχεί στο βάρος ένα. Εδώ το X μεταβάλλει το βάρος. η κυκλοτομική μεταβλητή παραμένει ανεξάρτητη. Όλες οι ενότητες περιόδου λαμβάνονται υπόψη μετά την αντιστροφή του p, όπως στον εντοπισμό χαρακτηριστικού μηδενός του [SW22, Παρατήρηση 1.3].

Τέλος, χρησιμοποιούμε τις κυκλοτομικές συμβάσεις της Ενότητας 2.5. Όλα τα μέτρα σε αυτήν την ενότητα -συνιστώσα, εξετάζονται ξεχωριστά σε κάθε άρτιο ω a ·j · οι τύποι $^{\text{ένα}}$ και η αναλυτική μεταβλητή j αντιπροσωπεύει
αξιολόγηση στο ω που εμφανίζονται ως προς το j αντιστοιχούν σε a = 0.

6.2. Συνομολογικές περίοδοι και ήπια στρέψη. Δεδομένου ότι ο υπολογισμός της αμοιβαιότητας θα πραγματοποιηθεί στην βοηθητική οικογένεια f0, χρειαζόμαστε μια αντιστοίχιση από τις περιόδους της f σε εκείνες της f0 η οποία ορίζεται ως A = L[[X]]. Η κανονικότητά της προκύπτει από τη γεωμετρία της αντιστοιχίας στρέψης (Πρόταση 6.1), ενώ η μη μηδενική της τιμή στο βάρος ένα θα είναι συνέπεια του υπολογισμού της αμοιβαιότητας της §6.3. Ξεκινάμε εισάγοντας τις σχετικές ενότητες συνομολογίας και το μέτρο του συμβολικού υποσυστήματος.

Συμπαγείς ενότητες περιόδου. Για g {f0,f}, βάλτε Mf0 = M και Mf = M2 συνηθισμένο αντίστροφο , και λάβετε υπόψη το όριο

$$H(Mg) = \lim \quad s^{H1} \text{ και } X1(Mgp\ s\ )Q\ , \quad \text{ΟΛ}^{\text{εντολή}},$$

με χάρτες μετάβασης ίχνους και τελεστές δυϊκού Hecke. Παίρνουμε την πεπερασμένη συνιστώσα διαμαντιού-χαρακτήρα του κλάδου και την προσημασμένη ενότητα H(Mg) (1), όπως στο [FK24, SW21]. Εδώ το πρόσημο αναφέρεται στον 1-ιδιόχωρο της σύνθετης συζεύξης πριν από τη συστροφή Tate, η οποία γίνεται ο +1-ιδιόχωρος μετά τη συστροφή. Η δυαδικότητα Poincare την ταυτοποιεί με το θετικό μέρος της ομολογίας των μονάδων συμβόλων. Δεδομένου ότι η σύνθετη συζεύξη στέλνει [u : v] στο [u : v], αυτό είναι το πρόσημο που φέρει τις άρτιες κυκλοτομικές ροπές. Τονίζουμε ότι, σε όλη την έκταση, η συμπαγής συνομολογία αναφέρεται στο H1 της συμπυκνωμένης καμπύλης X1, και όχι στο H1 της ανοιχτής καμπύλης Y1.

Machine Translated by Google

Έστω Λwt για την συνήθη άλγεβρα βαρών σε αυτήν την πεπερασμένη συνιστώσα, και έστω Hg η προηγούμενη προσημημένη ενότητα μετά την επέκταση των βαθμωτών από Λwt σε A. Έστω TMg η άλγεβρα Hecke με κυστίδια που παράγεται από τους τελεστές Tℓ για ℓ M p, τους τελεστές tame diamond και Up, και έστω λg : TMg A είναι το ιδιοσύστημα του g. Δεν συμπεριλαμβάνουμε τους τελεστές Uℓ για ℓ | M, αφού η tame στρίψιμο αλλάζει τις τοπικές ιδιοτιμές νέων διανυσμάτων τους. Ορίστε

(6.2) $$P_{g,cpt} = H_{gT} \quad \lambda_g(T) : T \quad TM_{gH_g} \qquad {}_{\tau\varphi}, \qquad q_g : H_g \quad P_{g,cpt},$$

όπου το ( )tf δηλώνει το πηλίκο από την A-στρέψη. Με άλλα λόγια, επιβάλλουμε τις ιδιοτιμές Hecke της οικογένειας και στη συνέχεια απορρίπτουμε τα στοιχεία που καταστράφηκαν από μια δύναμη του X. Αυτό το πεπερασμένο A-μοντέλο είναι απαλλαγμένο από τάξη ένα. Αυτό προκύπτει από τον συνηθισμένο έλεγχο και την πολλαπλότητα ένα στα ελάχιστα επίπεδα, όπως εξηγείται στην απόδειξη της Πρότασης 6.1 παρακάτω. Αναφερόμαστε στο Pg,cpt ως το συμπαγές δομικό στοιχείο περιόδου. Η ειδική ίνα του Pg,cpt := Pg,cpt/XPg,cpt είναι ένας μονοδιάστατος L-διανυσματικός χώρος, ο οποίος καταγράφει ένα πρόσημο μιγαδικής συζεύξεως της συνομολογίας.

Το μέτρο του αρθρωτού συμβόλου. Ορίζουμε τώρα το συνηθισμένο μέτρο του αρθρωτού συμβόλου L με ${}_{g,cpt,}$ τιμές σε Pg,cpt. Σε επίπεδο Mgp έστω [u : v] ο ${}^{\rho}$συνηθισμένος ${}^{+\rho}$ αντιπροσωπεύουν το σύμβολο συν Manin και ας ${}_{\text{παραγγελία ε}}$ προβολέας. Για a (Z/prZ) ×, η τιμή στο a + p rZp είναι η εικόνα του e ord[Mga : 1]+ στο πηλίκο της ${}_{\text{Πάνω}}{}^{r}$ οικογένειας. Ισοδύναμα, το μέτρο είναι το σύστημα

(6.3) $$L_{g,\,cpt} = \sum_{a \in (Z/prZ)^{\times}} q_g^{U\,\pi^{r}}\, e\ \mathrm{ord}[\text{Μάθη} : 1]_{\beta}^{\ddagger}\ [\text{ένα}]\ \cdot$$

Σύμφωνα με το [SW22, §2.2], τα σύμβολα αναγνωρίζονται κατά μήκος του συνηθισμένου πύργου πριν περάσουν στο πηλίκο της οικογένειας, και το [Mga : 1]r αντιπροσωπεύει τη διαδρομή { , a/pr}. Η σχέση ίχνους, κανονικοποιημένη από ^{r} το U p , δίνει

$$L_{g,cpt}(a + prZ_p) = \sum_{\beta=0}^{p\ \ 1} L_{g,cpt}(a + bpr + p^{\,r+1}Z_p).$$

Έτσι, οι τιμές είναι συμβατές με την υποδιαίρεση σε κλάσεις υπολειμμάτων. Το γεγονός ότι αυτά τα σύμβολα βρίσκονται σε συμπαγή ομολογία είναι [Sha11, Λήμμα 3.1]: η συνήθης προβολή του [u : v]r ως εξής από ανήκει σε συμπαγή ομολογία μόλις το v είναι μη μηδενικά modulo p, ο συνήθης υπολογισμός ακμής του [Oht99, Πρόταση 4.3.4]. Και οι δύο${}^{\rho}$, τόσο το u όσο και καταχωρήσεις των συμβόλων στο (6.3) ικανοποιούν αυτήν την συνθήκη, και επειδή οι πεπερασμένοι ήμεροι διαμαντένιοι προβολείς διατηρούν συμπαγή ομολογία, το ίδιο ισχύει και για τον κλάδο μας. Αντίθετα, το σύμβολο {0, } έχει μηδενική καταχώρηση· δημιουργεί την οριακή κλάση της Ενότητας 6.5.

Για να λάβουμε ένα μέτρο με βαθμωτή τιμή, επιλέγουμε μια A-βάση

$$\gamma_g \quad P_{g,cpt}, \qquad P_{g,cpt} = A\gamma_g,$$

και αξιολογούμε σε σχέση με τη δυϊκή βάση γ ${}_{\text{οολ}}$ HomA(Pg,cpt, A):

$$L_{\pi}^{cpt}(g) = (\gamma_{\text{οολ}}\ 1)(L_{g,cpt}), \qquad \text{έτσι ώστε } L_{g,cpt} = \gamma_g \quad L_{\pi}^{cpt}(g).$$

Αν το γg αντικατασταθεί από το v(X)γg, με v A×, το βαθμωτό μέτρο πολλαπλασιάζεται με το v(X) [1].

Γράφουμε το $L_{\pi}^{cpt}(f)$ για την εξειδίκευση του L cpt (f) στο X = 0. Πριν επιλέξουμε μια βάση, το εξειδικευμένο μέτρο ανήκει στο Pf,cpt L ΛL, και στο ΛL στη συνέχεια. Ας ελέγξουμε ότι είναι φραγμένο. Η ενότητα ολοκληρωτικής συνηθισμένης συνομολογίας παράγεται πεπερασμένα πάνω από την ολοκληρωτική άλγεβρα βαρών, και το δομοστοιχειωτό μέτρο της είναι ολοκλήρωμα. Μετά την εξειδίκευση στο βάρος ένα, η εικόνα της περιέχεται σε μια πεπερασμένα παραγόμενη OL-ενότητα της πεπερασμένων διαστάσεων εξειδικευμένης συνομολογίας. Η προβολή στο Pf,cpt και η εφαρμογή μιας σταθερής L-γραμμικής συντεταγμένης εισάγει μια σταθερή δύναμη του p στον παρονομαστή, ανεξάρτητα από τον αγωγό του κυκλοτομικού χαρακτήρα, και επομένως το βαθμωτό μέτρο είναι φραγμένο.

Machine Translated by Google

Παρεμβολή και η γενική σύγκριση περιόδων. Ακολουθούμε την άμεση σύμβαση Mellin για τα αρθρωτά σύμβολα, όπως στο [SW22, §2.1–2.2]. Σε ένα κλασικό σημείο y βάρους k 2, ένα πρωτόγονο r και έναν ακέραιο 0 j k 2 με ρ(1)(1)j = 1, ο βαθμωτός χαρακτήρας ρ της ροπής p του αγωγού στο z ρ(z)z j είναι

$$\frac{j!\, p^{rjt}(\rho)}{(2\pi i)^{j} a_p(g_y)^{r}\,\Omega_{g_y,\gamma_g(y)}} \frac{L(g_y, \rho^{-1}, 1+j)}{},$$

σύμβαση περιόδου περιλαμβάνει τον αντίστοιχο παράγοντα στο j = 0. Αυτό συμφωνεί με την παρεμβολή Mazur-Kitagawa της Ενότητας 5.2, εφόσον σταθεροποιηθούν οι ίδιες συμβάσεις για πεπερασμένους χαρακτήρες και ήπιους παράγοντες Euler. Στον γενικό κυστειδικό τόπο, οι δύο συνομολογικές υλοποιήσεις προσδιορίζουν τον ίδιο ρητό προσημασμένο ιδιοχώρο, επομένως οι βάσεις περιόδου τους διαφέρουν κατά ένα στοιχείο $q(X) \in L((X))^{\times}$, ανεξάρτητα από την κυκλοτομική ροπή. Συγκρίνοντας τους δύο τύπους παρεμβολής, λαμβάνουμε

$$L_p(f) = q(X) L_{\pi^{cpt}}(\phi_\alpha). \tag{6.4}$$

Πράγματι, αυτή η ταυτότητα ισχύει στα κλασικά ζεύγη παρεμβολής, τα οποία είναι πυκνά Zariski στο γινόμενο του χώρου βαρών και του κυκλοτομικού χώρου, και επομένως ισχύει για την οικογένεια. Αυτή είναι η γενική σύγκριση περιόδων που χρησιμοποιείται στην Υπόθεση 5.9(iii). Παρατηρήστε, ωστόσο, ότι στο βάρος ένα δεν υπάρχουν μιγαδικοί κρίσιμοι ακέραιοι: η εξειδίκευση $L_{\pi^{cpt}}(f)$ ορίζεται μέσω της συνομολογικής κατασκευής παραπάνω, και όχι μέσω μιας ιδιότητας παρεμβολής.

Ο χάρτης στρέψης. Γράψτε $\tau_m(\beta) = \sum_{a \bmod m} \beta(a)\zeta_m^a \chi_a^{-1}$ για το άθροισμα Gauss ενός χαρακτήρα β modulo m, όπου οι πρωτόγονες ρίζες της μονάδας επιλέγονται συμβατά. Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τον χάρτη στρέψης μεταξύ των δύο συμπαγών μονάδων περιόδου.

Πρόταση 6.1. Σύμφωνα με την (6.1), η ήπια συστροφή προκαλεί έναν Λ-γραμμικό χάρτη

$$\tau_\eta : P_{f,\pi^{cpt}} \to P_{f^0,\pi^{cpt}}, \qquad \tau_\eta(\gamma_f) = b_\eta(X)\gamma_{f^0}, \; b_\eta(X) \in \Lambda.$$

Και οι δύο ενότητες είναι απαλλαγμένες από βαθμό ένα και ο χάρτης είναι συμβατός με αναγωγή modulo X^n για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη. Αρχικά ελέγχουμε ότι και οι δύο ενότητες είναι απαλλαγμένες από τάξη ένα. Σε έναν πρώτο αριθμό $\ell \mid M$, ο βοηθητικός ο κλάδος έχει σταθερούς αδρανειακούς χαρακτήρες 1 και χ_ℓ^{-1} και μηδενική μονοδρομία, από το [BDP22, Πρόταση 4.4]. Επομένως, η γενική τοπική αναπαράστασή του είναι μια κύρια σειρά με έναν μη διακλαδωμένο χαρακτήρα και έναν χαρακτήρα του εκθέτη αγωγού $n = v_\ell(M)$. Μετά τη στρέψη κατά η, οι αδρανειακοί χαρακτήρες γίνονται $\chi_{1,\ell}$ και $\chi_{2,\ell}$, και οι δύο του εκθέτη αγωγού n, έτσι ώστε ο εκθέτης αγωγού να είναι 2n. Επομένως, τα γενικά επίπεδα ηρεμίας είναι ακριβώς M και M^2 και η πολλαπλότητα ένα σε αυτά τα ελάχιστα επίπεδα δίνει βαθμό ένα για τα προσημασμένα γενικά πηλίκα Hecke. Τα πηλίκα τους χωρίς στρέψη πάνω από τον διακριτό δακτύλιο αποτίμησης Λ είναι κατά συνέπεια απαλλαγμένα από βαθμό ένα. Σημειώστε επίσης ότι η επιβολή των παραλειπόμενων ιδιοτιμών U_ℓ δίνει το ίδιο πηλίκο χωρίς στρέψη, αφού και στις δύο περιπτώσεις ο πυρήνας του είναι ο κορεσμός του πυρήνα του ίδιου γενικού πηλίκου.

Στη συνέχεια περιγράφουμε ρητά την αντιστοιχία. Για $b \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{\times}$, βάλτε $u_b = \begin{pmatrix} 1 & b/M \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε

$$u_b \Gamma_1(M^2 p^s) u_b^{-1} \subset \Gamma_1(M p^s).$$

Πράγματι, η σύζευξη $(a\ b\ c\ d)$ δίνει διαγώνιες καταχωρήσεις $a+bc/M$ και $e \equiv d+b(e-a)/M - b \cdot 2c/M^2$, και η άνω δεξιά καταχώρηση και οι ορίζουσες ομοιομορφίες στο επίπεδο M^2p^s δίνουν τον ισχυρισμό. Επομένως

$$C_{b,s} : X_1(M^2 p^s) \to X_1(M p^s), \qquad z \mapsto z + b/M$$

είναι ένας πεπερασμένος χάρτης, ο οποίος εκτείνεται κατά μήκος των ακμών. Υπό την δυαδικότητα Poincare, το συνομολογικό του ίχνος αντιστοιχεί σε προώθηση στην ομολογία των μονάδων συμβόλων. Το κανονικοποιημένο άθροισμα

$$\tau_\eta = \tau_M(\eta^{-1})^{-1} \sum_{b \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{\times}} \eta^{-1}(\beta)(C_{\beta,s})$$

Machine Translated by Google

είναι η μεταφορά του συνήθους τελεστή συστροφής σε αρθρωτές μορφές· συγκεκριμένα, σε διαδρομές δίνεται από το αντίστοιχο άθροισμα των μεταφρασμένων διαδρομών.

Οι χάρτες Cb,s μετακινούνται με τους ξεχασιάρηδες χάρτες στον πύργο ισχύος p, επομένως η λειτουργικότητα του το ίχνος δίνει συμβατούς χάρτες στο αντίστροφο όριο. Οι ταυτότητες συστροφής διαβάζονται

$$\text{tη}T\ell = \eta(\ell)T\ell\ \text{tη}\ (\ell \quad M\ p), \qquad \text{tη}Up = \eta(p)Up\ \text{tη},$$

όπου το δεύτερο προκύπτει από τη μετάθεση των δεικτών απλής μετάφρασης υπό πολλαπλασιασμό με p. Δεδομένου ότι το η(p) είναι μονάδα, το tη διατηρεί τον συνηθισμένο άθροισμα, και επειδή το η είναι άρτιο, διατηρεί το πρόσημο. Όλοι οι συντελεστές της αντιστοιχίας, συμπεριλαμβανομένου του αντίστροφου αθροίσματος Gauss, βρίσκονται στο L, επομένως ορίζεται ως προς το A.

Τέλος, καταλήγουμε στην αντιστοιχία με τις ενότητες περιόδου. Με τις ταυτότητες Hecke και την πολλαπλότητα ένα, η σύνθεση qf0 tη παραγοντοποιείται μέσω qf στην γενική ίνα. Επομένως, εάν ένα στοιχείο βρίσκεται στο ker qf , η εικόνα του εξαφανίζεται μετά την αντιστροφή του X. Δεδομένου ότι ο στόχος δεν παρουσιάζει στρέψη, αυτή η εικόνα είναι ήδη μηδέν ως προς το A. Αυτό δίνει την απεικόνιση tη και αποδεικνύει τη συμβατότητά της με την αναγωγή.

Επομένως, η σύγκριση των συμπαγών περιόδων υπό στρέψη είναι κανονική στο βάρος ένα. Απομένει να αποδειχθεί ότι η ειδική ίνα της είναι μη μηδενική, και αυτό θα προκύψει από τον υπολογισμό της επόμενης υποενότητας.

6.3. Υπολογισμός του αρθρωτού συμβόλου και της αμοιβαιότητας. Σε αυτήν την υποενότητα αξιολογούμε τα στριμμένα αρθρωτά σύμβολα της βοηθητικής οικογένειας μέσω του χάρτη Sharifi. Πιο συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τη σύνθεση

$$\text{Pf,cpt} \qquad \text{τη} \qquad \text{Pf0,cpt} \qquad \text{Pf0,cpt}\ \varpi \qquad \text{Bχ} \qquad \ell\chi \qquad L$$

στο δομοστοιχειωτό μέτρο, όπου ο στόχος Bχ και η συντεταγμένη του ℓχ εισάγονται παρακάτω.
Το πρώτο βέλος είναι ο χάρτης της Πρότασης 6.1, το δεύτερο είναι η εξειδίκευση στο βάρος ένα, και το ϖ είναι ο εντοπισμένος ισομορφισμός Sharifi. Η παρακάτω συστρεφόμενη ταυτότητα εκφράζει το μέτρο εικόνας ως ένα ήμερο στρεβλό μέτρο αρθρωτού στοιχείου στην βοηθητική οικογένεια. Μετά την εξειδίκευση, το Sharifi στέλνει τα σύμβολά του σε γινόμενα κυπέλλου κυκλοτομικών μονάδων, και το ℓχ τα αξιολογεί με τοπικά σύμβολα Hilbert. Στο Λήμμα 6.2, η ρητή αμοιβαιότητα διαχωρίζει αυτήν την αξιολόγηση στον λογάριθμο μιας στρεβλής κυκλοτομικής μονάδας και σε ένα άθροισμα λογαριθμικών παραγώγων σειρών Coleman.
Αυτά δίνουν τους δύο παράγοντες Dirichlet.

Στρεβλωμένα αρθρωτά μέτρα. Έστω ρ ένας άρτιος πρωτόγονος χαρακτήρας του αγωγού p. Στον βοηθητικό $^{\rho}$, με r 2. κλάδο, ορίστε την ήπια στρεβλωμένη ροπή.

$$\text{Mf0,η(ρ)} = \text{qf0} \qquad \eta \qquad ^{1}1]+ (b)\rho(b)U_{\pi} \qquad \text{e ord[b :}\ _{\rho}$$
$$b \quad (Z/MprZ)\times \qquad r \quad .$$

Όπως και στην (6.3), κάθε συνηθισμένο σύμβολο είναι συμπαγές επειδή και οι δύο καταχωρήσεις είναι μη μηδενικές modulo p. $^{\rho}$ · Ο παράγοντας η επιλέγει την ήπια συστροφή, ενώ το U_{π}^{r} παρέχει συμβατότητα κατά μήκος του συνηθισμένου πύργου.

Οι τιμές βρίσκονται στο Pf0,cpt L L(ρ), και γράφουμε Mf0,η|X=0(ρ) για το αποτέλεσμα της εξειδίκευσης αυτού του μέτρου που βασίζεται σε ενότητες στο X = 0 και στη συνέχεια της αξιολόγησης στο ρ. Εδώ [M] είναι το μέτρο Dirac στο Γ, έτσι ώστε [M](ρ) = ρ(M). αυτή είναι η πηγή του συντελεστή αγωγιμότητας στο Θεώρημα A.

Η αντιστοιχία συστροφής δίνει την ταυτότητα των μετρήσεων που αποτιμώνται σε επίπεδο ενότητας

$$\text{Mf0,η} = \tau M(\eta \qquad ^{1})[M]\text{tη}(L\ \text{f,cpt}). \tag{6.5}$$

Machine Translated by Google

Για να το αποδείξουμε, και ειδικότερα για να ελέγξουμε την κατεύθυνση του [M], εφαρμόστε την κανονικοποιημένη αντιστοιχία στη ροπή στην (6.3). Στη συμβολική μορφοποίηση με modular symbol, παίρνουμε

$$\text{tη L f,cpt(ρ)} = \frac{\text{ap(f)} \quad r}{\tau_M(\eta \quad 1)} \sum_{a \bmod pb \,\text{mod}\, M\,(a,p)=(b,M)=1} \rho(\alpha)\eta^{1}(\beta) \quad , \quad \frac{\text{ένα}}{\pi^{\rho}} + \frac{\sigma\iota}{M} \quad ,$$

όπου η συνήθης προβολή και το βοηθητικό πηλίκο νοούνται στη δεξιά πλευρά. Ορίστε c = M a + pr b . Το θεώρημα του κινεζικού υπολοίπου ταυτοποιεί αυτά τα ζεύγη (a, b) με (Z/M prZ) ×, και

$$\rho(\alpha)\eta^{1}(\beta) = \rho(M) \quad {}^{1}\eta(p) \; r\, \rho(c)\eta^{1}(\text{ντο}), \qquad \text{ap(f)} = \eta(p)\text{ap(f0)}.$$

Δεδομένου ότι a/pr + b/M = c/(M pr), προκύπτει ότι

$$\text{tη L f,cpt(ρ)} = \tau_M(\eta^{1}) \quad {}^{1}\rho(M) \quad 1\text{Mf0},\eta(\rho),$$

η οποία είναι η (6.5). Συγκεκριμένα, η επίλυση για το μέτρο της f ως προς το modular παράγει [M] την ^{1}, το οποίο είναι αρχή του παράγοντα M j στο Θεώρημα A.

Ο στόχος του χάρτη Sharifi. Έστω Θ = χω, και έστω p ο εξαιρετικός πρώτος αριθμός ύψους-ένα βάρος της συνήθους άλγεβρας βαρών ΛΘ. Θεωρήστε

$$\text{SΘ} = \lim_{n} \text{H2 et}(Z[\zeta_M p^n, 1/p], Z_p(2))_{\Theta}, \quad \text{Bχ} = \text{SΘ,p} \quad \text{kΘ,p L},$$

όπου kΘ,p είναι το πεδίο υπολειμμάτων του ΛΘ,p. Υπενθυμίζεται ότι οι τοπικές αναλλοίωτες προσδιορίζουν τις τοπικές ομάδες H2 (· , Zp(1)) στους πρώτους αριθμούς v | p με Zp, και ότι το συνολικό άθροισμα αυτών των αναλλοίωτων είναι μηδέν. Επομένως, αν Σ συμβολίζει το σύνολο των πρώτων αριθμών πάνω από το p στο Q(μM p) και 0 αντιπροσωπεύει τον πυρήνα του αθροιστικού χάρτη, [SW21, Λήμμα 3.1 και Πρόταση 3.2] δίνουν

$$\text{SΘ,p} \quad \Big(\quad {}^{0} \quad \text{Zp})\chi(1) \quad \text{kΘ,p}.$$
$$v \quad \Sigma \qquad\qquad \pi$$

Εδώ ο όρος κλάσης-ομάδας μηδενίζεται από το [SW21, Λήμμα 3.1], καθώς η Tate συστροφή του έχει χαρακτηριστικό ιδανικό πρώτο αριθμό ως προς τον εξαιρετικό πρώτο με βάρη. Δεδομένου ότι το χ είναι μη τετριμμένο και χ(p) = 1, η χ-συνιστώσα της μονάδας μετάθεσης στους πρώτους πάνω από το p έχει διάσταση ένα και βρίσκεται στον πυρήνα του αθροίσματος. Αυτό εξηγεί τόσο τη διάσταση του Bχ όσο και την ερμηνεία του με όρους τοπικών αναλλοίωτων.

Για να ορίσετε μια συντεταγμένη, επιλέξτε τον πρώτο αριθμό v0 | p που καθορίζεται από το ιρ και πάρτε τις συμβατές ρίζες ζpn ως βάση της συστροφής Tate. Έστω G = (Z/MZ) ×, έστω Dp = p G και γράψτε fM = |Dp|. Αν δν0 δηλώνει το διάνυσμα που υποστηρίζεται στο v0, ορίστε

$$= \text{fM} \quad \frac{\varphi(M)\, e\chi}{\varphi(M)} \quad \frac{1}{g \quad G} \quad \chi^{1}(g)g \quad \delta v0 \quad (\zeta_{p^n})_n.$$

Δεδομένου ότι χ |Dp = 1 και χ ≠ 1, αυτό είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα στον πυρήνα του αθροίσματος, του οποίου η συντεταγμένη v0 είναι 1 στην επιλεγμένη βάση Tate. Έστω ℓχ : Bχ L αυτή η συντεταγμένη, έτσι ώστε ℓχ(eχ) = 1. Συγκεκριμένα, ℓχ είναι η τοπική αμετάβλητη στο v0, και χρησιμοποιούμε τη συνήθη σύμβαση στην οποία ο εκθέτης του συμβόλου Hilbert ταυτίζεται με το αντίστοιχο στοιχείο του Z/pnZ. Έτσι, η συντεταγμένη ενός γινομένου κυπέλλου υπολογίζεται από το τοπικό σύμβολο Hilbert στο v0.

Machine Translated by Google

Ο εντοπισμένος χάρτης Sharifi. Η πηγή του [SW21, Θεώρημα 1.2] είναι H1 et(X1(M pn)Q , Zp)

$$(1)\ I(1), H = \lim H \quad \Theta,pH \quad \Theta,p\,\Theta,p \quad n \qquad \text{εντολή},$$

και συγκεκριμένα το H είναι η συνομολογία της συμπυκνωμένης καμπύλης. Το θεώρημά τους ταυτοποιεί αυτό το πηλίκο με το SΘ,p, στέλνοντας ένα συμπαγές συνηθισμένο σύμβολο Manin [u : v] στην Θ-προβολή του γινομένου κυπέλλου {1 ζ u 1 ζ v} των κλάσεων Kummer των αντίστοιχων,κυκλοτομικών μονάδων. Επιπλέον, η εντοπισμένη άλγεβρα Hecke με κυλινδρικό σχήμα είναι ο δακτύλιος βαρών από το [BDP22, Θεώρημα A(i)], και το [SW21, Πρόταση 3.5 και η παράγραφος που προηγείται] δείχνει ότι η προσημημένη συμπαγής ενότητα είναι απαλλαγμένη από τάξη ένα σε σχέση με αυτήν την άλγεβρα και ταυτοποιεί το ιδανικό Eisenstein με τον εξαιρετικό πρώτο βάρος. Μετά την ολοκλήρωση, αυτό το ιδανικό γίνεται (X), και η πηγή του θεωρήματος είναι ακριβώς το Pf0,cpt. Λαμβάνουμε έτσι έναν ισομορφισμό.

$$\varpi : Pf0,cpt \qquad B\chi. \quad (6.6)$$

Τονίζουμε ότι αυτή η ταύτιση προέρχεται από το [SW21, Θεώρημα 1.2], το οποίο διατυπώνεται μετά τον εντοπισμό στο p, και ότι ορίζεται στην ίδια την συμπαγή συνομολογία· η διεύρυνση Drinfeld-Manin της συμπαγούς συνομολογίας, την οποία εξετάζουμε στην Πρόταση 6.8, δεν παίζει κανένα ρόλο εδώ.

Ο υπολογισμός της αμοιβαιότητας. Τώρα αξιολογούμε την εικόνα κάτω από τον εντοπισμένο χάρτη Sharifi.
Ο προκύπτων τύπος είναι μια ήρεμη, διαστρεβλωμένη εκδοχή του [SW22, Πρόταση 2.6], ο οποίος αξιολογεί, στη συμβολική του μορφή,

$$\psi^{1}(\alpha)(1 \quad \zeta_{\pi}^{\text{ανα}}\rho, \quad 1 \quad \zeta_{M}^{p \quad r}\,)r,\Theta = \varphi(M) \quad \frac{\tau M(\chi\,\zeta_{p}^{\quad 1})}{\text{μηχάνημα}} \quad \pi^{\text{κανάλι διαφημίσεις}}(\psi, 1)L_{\pi}^{\text{κανάλι διαφημίσεις}}(\chi\omega\psi^{\quad 1}, 0)$$

$$a \quad (Z/prZ)^{\times}$$

modulo p για έναν άρτιο μη τετριμμένο χαρακτήρα ψ του αγωγού p r με r 2. Στο δικό μας περιβάλλον, η πρώτη καταχώρηση του γινομένου κυπέλλου φέρει επίσης τον ήπιο χαρακτήρα η και το κύριο σημείο του υπολογισμού παρακάτω είναι να παρακολουθούμε αυτόν τον χαρακτήρα μέσω της ιχνηλασίας. Όπως και στην προαναφερθείσα παράγραφο, περιορίζουμε τους χαρακτήρες με r 2. Αυτοί είναι αρκετοί για να προσδιορίσουν τα φραγμένα μέτρα.

Θα εμφανιστούν δύο είδη αθροισμάτων. Για ένα modulus m και χαρακτήρες ν, ϑ modulo m, βάλτε

$$(6.7)\qquad S_m(\nu) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}} \nu^{1}(\alpha)\log_p(1 \quad \zeta_{a\,m}), \qquad B_m(\theta) = \sum_{b \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}} \vartheta^{1}(\beta)\,\frac{\zeta_{\mu}^{\sigma_t}}{1 \quad \zeta_{\mu}^{\sigma_t}}.$$

Το πρώτο είναι το λογαριθμικό άθροισμα του τύπου του Leopoldt για το $L_{\pi}^{\text{κανάλι διαφημίσεις}}(\nu, 1)$, και προκύπτει από τον λογάριθμο της πρώτης καταχώρησης του γινομένου κυπέλλου. Η δεύτερη είναι μια πεπερασμένη έκφραση Fourier για το L(θ, 0), και προκύπτει από τη λογαριθμική παράγωγο της δεύτερης καταχώρησης.

Λήμμα 6.2. Με τη συντεταγμένη ℓχ σταθερή παραπάνω, θέτουμε dχ = fM/(Mφ(M)). Στη συνέχεια, για κάθε άρτιο πρωτόγονο χαρακτήρα ρ του αγωγού p r με r 2, τM(χ2)

$$(6.8)\qquad \ell_{\chi}\varpi\,Mf0,\eta\,|_{X=0(\rho)} = d_{\chi}M \;\; L \;\; \frac{\tau M(\chi 1}{\text{κανάλι διαφημίσεις}} \rho^{\quad 1}, 1)\Lambda_{\pi}^{\text{κανάλι διαφημίσεις}}(\chi^{\quad 1}\,2\,\omega\rho, 0).$$

Απόδειξη. Στερεώστε ρ του αγωγού p^{2} r. Τότε το ν είναι περιττό και $\nu = \chi_1\rho^{1}$, και οι δύο χαρακτήρες είναι αρχικοί του αγωγού m. Αφού η = χ1, έχουμε η 1ρ = ν

Χωρίζουμε την απόδειξη σε πέντε βήματα.

Βήμα 1: από τα αρθρωτά σύμβολα σε ένα μοναδικό γινόμενο κυπέλλου. Διορθώστε n r. Για να υπολογίσουμε τον σύμβολα modulo p Hilbert εργαζόμαστε σε επίπεδο M pn και παίρνουμε ως πρωτόγονο M pn την ρίζα της μονάδας.

$$q_n = \zeta\,\zeta_{p^{n}M}^{p \quad n \quad M \quad 1}$$

σύστημα λαμβάνεται modulo M και M 1 modulo p ν^{n} Στη συνέχεια, $q_{\nu}^{\pi} = q_n \quad 1$, άρα το $(q_n)_n$ είναι ένα συμβατό όπου p με πρωτόγονες M pn -οστές ρίζες μονάδας, τις οποίες χρησιμοποιούμε στην περιγραφή του ϖ. Συγκεκριμένα, η ρίζα ζm είναι qr. Επεκτείνουμε το ν σε έναν χαρακτήρα modulo M pn . Με βάση τη συμβατότητα του μέτρου κατά μήκος του πύργου, η ρ-ροπή μπορεί να υπολογιστεί στο επίπεδο n. Σημειώστε ότι στο X = 0 ο τελεστής

Machine Translated by Google

Η συνάρτηση Up επιδρά στο Pf0,cpt μέσω του ap(f0) = 1, έτσι ώστε η κανονικοποίηση από π^n δεν συμβάλλει.
το U. Στη συνέχεια, από την περιγραφή του ϖ που ανακλήθηκε πριν από την (6.6), σε αυτό το επίπεδο το στοιχείο ϖ Mf0,η |X=0(ρ) αναπαρίσταται από την Θ-προβολή του

$$\eta^{1}(\beta)\rho(\beta)\{1 \quad q^{\sigma\iota}\nu, 1 \quad qn\} = \nu^{1}(\beta)\{1 \quad q^{\sigma\iota}\nu, 1 \quad qn\} = \{uv,n, 1 \quad qn\}.$$
$$b \quad (Z/M\ pnZ)\times \qquad\qquad b \quad (Z/MpnZ)\times$$

Εδώ οι αγκύλες υποδηλώνουν το γινόμενο κυπέλλου των δύο κλάσεων Kummer, με τιμές στο H2 η τελευταία , και ισότητα είναι η διγραμμικότητα του γινομένου κυπέλλου, με

$$uv,n = \nu^{1}(\beta)\,(1 \quad q^{\sigma\iota}\nu),$$
$$b \quad (Z/M\ pnZ)\times$$

γραμμένο προσθετικά στις μονάδες Q(μM pn) τενσορισμένο με L(ρ). Παρατηρήστε ότι κάθε μονάδα $1 \quad q^{\sigma\iota}\nu$ είναι a, αφού το M pn δεν είναι πρώτη δύναμη (θυμηθείτε ότι M > 1). Αυτό είναι απαραίτητο για να λάβουμε p-αδικούς λογάριθμους και να εφαρμόσουμε τον νόμο της αμοιβαιότητας παρακάτω. Αυτή είναι η έκδοση ήμερου χαρακτήρα της κατασκευής συμπαγών συμβόλων του [SW22, §2.4]. Η ροπή επομένως αναπαρίσταται από το προβαλλόμενο γινόμενο κυπέλλου eΘ{uv,n, 1 qn}. Η επανεισαγωγή της πρώτης καταχώρησης δίνει

$$\sigma c(uv,n) = \nu^{1}{}_{(\nu\tau o}{}^{1}\beta)(1 \quad q^{\sigma\iota}\nu) = \nu(c)uv,n, \qquad \log p\,(uv,n) = SM\ pn\ (\nu),$$
$$\sigma\iota$$

όπου σc(qn) = q και ο $\nu\tau o$ λογάριθμος υπολογίζεται μέσω του ιp. Η δράση Galois γίνεται στον μοναδιαίο παράγοντα, με τους συντελεστές χαρακτήρων σταθερούς. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ταυτότητα ιδιοδιανύσματος για να διαχωρίσουμε τις δύο καταχωρήσεις στον τύπο αμοιβαιότητας.

Βήμα 2: από το γινόμενο κυπέλλου στα σύμβολα Hilbert. Για g G = (Z/MZ) × και δ Δ, έστω σg,δ ο αυτομορφισμός που ανεβάζει την απλή ρίζα της μονάδας στη δύναμη g και την p-ρίζα της μονάδας (g,δ) στη δύναμη Teichmüller, ανυψώνοντας ω(δ), και βάλτε το q ν = σg,δ(qn). Ο Θ-προβολέας είναι

$$e\Theta = \frac{}{1\ \varphi(M)(p \quad 1)} \quad \chi^{1}(g)\omega^{1}(\delta)\ \sigma g,\delta.$$
$$g \quad G,\ \delta \quad \Delta$$

Υπενθυμίζουμε ότι το ℓχ είναι το αμετάβλητο στο v0, και ότι το τοπικό αμετάβλητο του γινομένου κυπέλλου των κλάσεων Kummer δύο μονάδων είναι το σύμβολο Hilbert τους. Δεδομένου ότι το γινόμενο κυπέλλου ν είναι ισοδιάστατο Galois και σg,δ(uv,n) = ν(σg,δ)uv,n από το Βήμα 1, βρίσκουμε, modulo p ,

$$\ell\chi\ e\Theta\{uv,n, 1 \quad qn\} = \varphi(M)(p \quad 1) \quad \frac{1}{} \quad \chi^{1}(g)\omega^{1}(\delta)\nu(\sigma g,\delta)\ uv,n, 1 \quad q^{(g,\delta)}\nu_{\alpha\omega\varepsilon\iota\sigma\ o}.$$
$$g,\delta$$

Αυτή είναι η ακριβής έννοια με την οποία η αριστερή πλευρά της (6.8) είναι ένα στρεβλό άθροισμα συμβόλων Hilbert, πάντα με την ίδια πρώτη καταχώρηση uv,n.

Βήμα 3: ρητή αμοιβαιότητα και διαχωρισμός των δύο αθροισμάτων. Τώρα εφαρμόζουμε τον ρητό νόμο αμοιβαιότητας που χρησιμοποιείται στο [SW22, Πρόταση 2.6]. Έστω Kn = Qp(μM pn) και Zn = ζpn 1. Αν το (g,δ) αξιολογηθεί στο Zn με

Το Dg,δ είναι η λογαριθμική παράγωγος της σειράς Coleman για $1 \quad q^{\nu}$. Σύμφωνα με τη σύμβαση Frobenius,
παρακάτω, ο νόμος υπολογίζει το σύμβολο Hilbert του έναντι μιας μονάδας x ως εξής:

$$(x, 1 \quad q^{n})_{v0} = p^{(g,\delta)} \qquad \mathrm{Tr}_{Kn/Qp}\ \log p\ (x)D_{g,\delta}\ (\mathrm{mod}\ p^{n}).$$

Ο νόμος ισχύει εδώ, καθώς και οι δύο καταχωρήσεις είναι μονάδες του Kn. Χρησιμοποιούμε τη σύμβαση εκθέτη για τα σύμβολα Hilbert που καθορίστηκαν παραπάνω και επεκτείνονται γραμμικά στους συντελεστές χαρακτήρων. Σημειώστε ότι η σταθερά dχ που προκύπτει παρακάτω εξαρτάται από την κανονικοποίηση της συντεταγμένης ℓχ και από αυτήν τη σύμβαση πρόσημου, επομένως μια άμεση σύγκριση με τη σταθερά του [SW22, Πρόταση 2.6] απαιτεί την αντιστοίχιση αυτών των κανονικοποιήσεων. Έτσι, πρέπει να υπολογίσουμε τον λογάριθμο της πρώτης καταχώρησης, την παράγωγο Coleman της δεύτερης και το ίχνος τους.

Machine Translated by Google

Για x = uv,n, το Βήμα 1 δίνει τ(logp uv,n) = ν(τ) logp (uv,n). Επομένως, η επέκταση του ίχνους αποδίδει

$$\mathrm{Tr}_{Kn/Qp} \log_p(uv,n)D_{g,\delta} = \sum_{\tau} \tau(\log_p uv,n)\tau(D_{g,\delta})$$

$$= SM_{p^n}(\nu) \sum_{\tau} \nu(\tau)\tau(D_{g,\delta}).$$

Αυτό εξάγει το λογαριθμικό άθροισμα ως τον πρώτο παράγοντα. Το υπόλοιπο άθροισμα φέρει τα βάρη χαρακτήρων που άφησε η πρώτη καταχώρηση και το eΘ.

Για να υπολογίσουμε τους όρους της, θεωρούμε τη σειρά Coleman

$$C(Z) = \sum_{\zeta_M(1+Z)^{1/M}} O_{Qp(\mu M)}[[Z]],$$

όπου η διωνυμική ανάπτυξη ορίζεται επειδή $M \in Z_p^{\times}$ οι συντελεστές, έτσι $\pi_{M,}$ Έστω φ ο μη διακλαδωμένος Φρόμπενιους στο ώστε φ(ζM) = ζ και ορίστε

$$C_n(Z) = \varphi^n C(Z) = \sum_{\zeta_M^{p^n}(1+Z)^{1/M}}.$$

Τότε $C_n(Z_n) = \sum_{\zeta_{q^n}}$. Με $= (1+Z)d/dZ$, η διαφοροποίηση ακολουθούμενη από αξιολόγηση δίνει

$$\frac{1}{M_p} \log C_n(Z) = \sum_{\zeta_M^{p^n}} \frac{(1+Z)^{1/M}}{\zeta_M - (1+Z)^{1/M}}, \qquad \frac{1}{M} \log C_n(Z_n) = \sum_{\zeta_{q^n}} \frac{1}{1-\zeta_{q^n}}.$$

Για το συζυγές $1 - q^n$, αντικαταστήστε τον συντελεστή με ζ_M και ο εκθέτης από ω(δ)/M. Ο ίδιος υπολογισμός δίνει

$$D_{g,\delta} = \frac{\omega(\delta)}{M} \frac{q_\nu^{(g,\delta)}}{1 - q_\nu^{(g,\delta)}}.$$

Κάθε αξιολόγηση έχει παράγει έναν ρητό όρο. Για να λάβουμε το άθροισμα Fourier, συνδυάζουμε τα συζυγή του στο ίχνος με τα βάρη του προβολέα. Το τοπικό ίχνος εκτείνεται πάνω από τις μη διακλαδωμένες δυνάμεις Frobenius $p^0 \le i < fM$, και τους αυτομορφισμούς $t \in (Z/p^nZ)^\times$ του κυκλοτομικού μέρους.

Ο παράγοντας Teichmüller ω(δ) στο $D_{g,\delta}$ εξουδετερώνεται με τον συντελεστή $\omega^{-1}(\delta)$ του προβολέα. Έστω $b = g^i \in G$ και $c = \delta t \in (Z/p^nZ)^\times$. Δεδομένου ότι χ(p) = 1, έχουμε χ γινόμενο $^{-1}(g) = \chi(b)$, και το (c). Σε των δύο τιμών χαρακτήρων $\nu(\sigma_g,\delta)\nu(\tau)$ ίσο με $\nu(b,c) = \eta(b)\rho(b)$, αυτό αφήνει συνδυασμό με χ^{-1}

$$\chi^{-1}(\beta)\eta(\beta)\rho^{-1}(c) = \chi^2(b)\rho(b,c)^{-1}(\gamma) = \vartheta^{-1}(\beta,\gamma),$$

το συζυγές του q^n που αναγράφεται από το (b, c) είναι το q^{-n}. Για κάθε σταθερό ζεύγος (b, c), οι εξισώσεις $b = g^{pi}$ και $c = \delta t$ έχουν ακριβώς λύσεις $fM(p-1)$ με $0 \le i < fM$ και $\delta \in \Delta$, αφού τα g και t προσδιορίζονται μόλις τα i και δ σταθεροποιηθούν. Μαζί με την κανονικοποίηση $1/(\varphi(M)(p-1))$ του προβολέα και τον παράγοντα $1/M$ της λογαριθμικής παραγώγου, ο δεύτερος παράγοντας γίνεται

$$\frac{fM}{M\varphi(M)(b,c)} \vartheta^{-1}(\beta,\gamma) = \sum_{\nu} \frac{q_\nu^{(\pi.X)}}{d_\chi BM_{p^n}(\theta)}, (\beta,\gamma)^{-1} \in q^{-n}$$

αφού το q^n είναι μια πρωτόγονη M_{p^n}-οστή ρίζα της μονάδας. Συγκεκριμένα, η βαθμωτή $d_\chi = fM/(M\varphi(M))$ είναι ανεξάρτητη από τα n, η και ρ. Συμπεριλαμβάνοντας τον παράγοντα p^{-n} του νόμου της αμοιβαιότητας, καταλήγουμε δίνεται από $^{\nu,}$, στο συμπέρασμα ότι, το αριστερό μέλος της (6.8)

$$\text{τον modulo } p^{-n} \quad d_\chi p^{-n} SM_{p^n}(\nu) BM_{p^n}(\theta).$$

Βήμα 4: μετάβαση στο χαρακτηριστικό μηδέν. Η προηγούμενη έκφραση λήφθηκε από τον Hilbert, ενώ το modulo p περνούν $^{\nu,}$ αριστερό μέλος της (6.8) είναι μια χαρακτηριστική μηδενική ποσότητα. Τα σύμβολα στο όριο με ρ σταθερό και $n \to r$ που τείνει στο άπειρο. Θεωρώντας τα ν και ϑ ως χαρακτήρες

Machine Translated by Google

modulo M pn , όπως στο Βήμα 1, η συμβατότητα κανόνων και η αντίστοιχη ταυτότητα για λογαριθμικές παραγώγους δίνουν

$$SM\,pn\,(\nu) = Sm(\nu),\ BMpn\,(\theta) = p\,n\quad rBm(\theta).$$

Επομένως, το p nSM pn (ν)BMpn (θ) = p rSm(ν)Bm(θ) είναι ανεξάρτητο από το n. Επιπλέον, για αυτό το σταθερό ρ υπάρχει ένας ακέραιος c 0 τέτοιος ώστε οι προβολείς χαρακτήρων και η συντεταγμένη ℓχ στέλνουν το ολοκληρωτικό πλέγμα των τοπικών αναλλοίωτων στο p cOL(ρ) . Οι ισοδυναμίες αμοιβαιότητας δείχνουν στη συνέχεια ότι η διαφορά μεταξύ της αριστερής πλευράς της (6.8) και του dχp rSm(ν)Bm(θ) ανήκει στο p n cOL(ρ) για κάθε n r. Δεδομένου ότι η τομή αυτών των ιδανικών είναι μηδέν, παίρνουμε την ισότητα

$$\ell\chi\varpi\ Mf0,\eta\,|X=0(\rho) = \quad d\chi p\quad rSm(\nu)Bm(\vartheta)$$

σε L(ρ).

Βήμα 5: οι δύο τιμές Kubota–Leopoldt. Απομένει να προσδιοριστούν τα δύο αθροίσματα με p-αδική εξίσωση. Τιμές L. Έχουμε

$$Sm(\nu) = \frac{\mu}{\tau m(\nu)} L_{\pi^{\text{Grothendieck-Serre prime}}}(\nu, 1), \qquad Bm(\theta) = \tau m(\theta^{1}{}_{)\text{ΜΕΓΑΛΟ}_{\pi^{\text{Grothendieck-Serre prime}}}}(\omega\theta, 0).$$

Η πρώτη ταυτότητα είναι ο τύπος του Leopoldt, στη σύμβαση της Ενότητας 2.5. Για τη δεύτερη, χρησιμοποιήστε ότι

$$\frac{z}{1\quad z} = \sum_{\alpha=0}^{m\ \ 1} \frac{1}{2}\quad \frac{\text{ένα}}{\mu}\quad z^{\text{ένα}}\qquad 1\ (z\ m = 1,\ z \neq 1)$$

μαζί με το (b)ζ ial, και$\vartheta^{\ 1}{}_{\alpha}^{\alpha\beta}{}_{\mu} = \vartheta(a)\tau m(\vartheta^{\ 1})$; ο σταθερός όρος αποσύρεται επειδή το ϑ είναι μη τριγωνικό ανακτούμε την έκφραση $L(\vartheta, 0) = \frac{1}{\mu\alpha\mu\acute{\alpha}}$ ϑ(a)a, η οποία επίσης καθορίζει το πρόσημο. Και στις δύο περιπτώσεις ταυτότητες οι παράγοντες p-Euler είναι ίσοι με 1, αφού οι χαρακτήρες διακλαδώνονται στο p. Αντικαθιστώντας στον τύπο του Βήματος 4 και χρησιμοποιώντας m = Mpr , λαμβάνουμε

$$d\chi p\quad rSm(\nu)Bm(\vartheta) = d\chi M\ \tau m(\nu)\frac{\tau m(\vartheta^{\ 1})}{}\Lambda_{\pi^{\text{Grothendieck-Serre prime}}}(\nu, 1)L_{\pi^{\text{Grothendieck-Serre prime}}}(\omega\theta, 0).$$

Τέλος, ο πολλαπλασιασμός των πρωτόγονων αθροισμάτων Gauss δίνει

$$\frac{\tau Mpr\,(\vartheta^{\ 1})}{\tau Mpr\,(\nu)} = \frac{\chi 2(p)}{\chi 1(p)}^{\rho}\frac{\tau M(\chi 2)}{\tau M(\chi 1)} = \frac{\tau M(\chi 2)}{\tau M(\chi 1)},$$

αφού τα αθροίσματα Gauss χωρίς συνάρτηση και οι παράγοντες στο M εξουδετερώνονται. Όπως ^{1} και $\omega\vartheta = \chi\ 2\ \omega\rho$, $^{1}_{\text{αυτό}}$ αποδεικνύει η (6.8) ν = χ1ρ .

6.4. Παραγοντοποίηση και επιλογή περιόδων. Ο υπολογισμός της αμοιβαιότητας καθορίζει την εικόνα του συμπαγούς μέτρου υπό στρέψη και δείχνει ότι τουλάχιστον μία από τις ροπές πεπερασμένης τάξης είναι μη μηδενική. Δεδομένου ότι αυτή η εικόνα παραγοντοποιεί μέσω του tη, ο χάρτης στρέψης είναι μη μηδενικός στο βάρος ένα και επομένως προσδιορίζει τις δύο ενότητες συμπαγούς περιόδου, επιτρέποντάς μας να ανακτήσουμε το ίδιο το μέτρο της f.

Θεώρημα 6.3. Σύμφωνα με την (6.1), η απεικόνιση tη είναι ένας ισομορφισμός των μονάδων συμπαγούς περιόδου. Επιπλέον, εάν η συμπαγής περίοδος στο βάρος ένα επιλεγεί να είναι

$$^{cpt}{}_{= t^{-}\ 1\ \varpi_{\eta}\ ^{1}\,(e\chi),\ \bar{\gamma}^{-}\,f}$$

τότε, για κάθε άρτιο χαρακτήρα πεπερασμένης τάξης ρ του αγωγού p $^{\rho}$, με r 2,

$$L^{\ cpt}_{\pi}\,(f)(\rho) = d\chi\tau M(\chi 2)\rho(M)\quad 1L\ KL\,(\chi 1\rho\qquad\qquad \pi\qquad\qquad ^{1}, 1)\Lambda_{\pi^{\text{Grothendieck-Serre prime}}}(\chi\ ^{1}_{2\ \omega\rho, 0}). \tag{6.9}$$

Αυτές οι τιμές καθορίζουν μια ισότητα μη μηδενικών ορίων μέτρων σε κάθε άρτια συνιστώσα.

Machine Translated by Google

Απόδειξη. Ξεκινάμε με αυθαίρετες βάσεις και θέτουμε sf0 = ℓχτω(¯γf0), η οποία είναι μη μηδενική από την (6.6). Εφαρμόζοντας το ℓχτω στην εξειδίκευση της (6.5) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2,

$$\tau M(\chi_{\ 1}^{\ 1})\rho(M)sf0\ b\eta(0)L \underset{\pi}{\overset{cpt}{}}{}_{(\rho)\,=\,d\chi M\,L\,p\,\tau M(\chi 1)} \underline{\lambda\alpha\mu\beta\acute{\alpha}\nu ουμε\,\tau M(\chi 2)}\ {}^{\kappa L(\eta)}_{(\chi 1\rho}{}^{1}\ ,\ 1)\Lambda\ \overset{\text{Κανάλι Νικομήδους}}{\pi}(\chi_{\ 2}^{\ 1}\omega\rho,\ 0).$$

Οι δύο παράγοντες Dirichlet είναι μη μηδενικά φραγμένα μέτρα: οι ήπιοι χαρακτήρες τους είναι μη τετριμμένοι, επομένως κανένας από αυτούς δεν έχει τον πόλο της p-αδικής συνάρτησης ζήτα. Σε μια σταθερή συνιστώσα, ένα μη μηδενικό στοιχείο του OL[[Γ1]][1/p] έχει μόνο πεπερασμένο αριθμό μηδενικών σε χαρακτήρες πεπερασμένης τάξης, σύμφωνα με το θεώρημα παρασκευής Weier-strass. Συνεπώς, η δεξιά πλευρά δεν είναι ταυτόσημα μηδέν, γεγονός που επιβάλλει bη(0)≠ 0, και η Πρόταση 6.1 δείχνει στη συνέχεια ότι το τη είναι ένας ισομορφισμός ως προς το Α. Δεδομένου ότι το χ1 $_{1}^{\ 1}$) = χ1(1)M = M. Με την περίοδο που καθορίζεται στην πρόταση είναι άρτιο, έχουμε τM(χ1)τM(χ), έχουμε sf0 bη(0) = 1, και ο τύπος ακολουθεί. Το ίδιο επιχείρημα μοναδικότητας για φραγμένα μέτρα προάγει την ταυτότητα σε χαρακτήρες πεπερασμένης τάξης σε μια ταυτότητα μέτρων.

Το θεώρημα ομαλοποιεί την περίοδο χρησιμοποιώντας τον χάρτη Sharifi. Για άλλες βάσεις, η σταθερά αλλαγές ως εξής.

Παρατήρηση 6.4 (Άλλες συμπαγείς περίοδοι). Για αυθαίρετες βάσεις, βάλτε

$$sf0 = \ell\chi\tau\omega(\bar{}\gamma f0\ ),\qquad Cf,\gamma = sf0\ \frac{d\chi\tau M(\chi 2)}{b\eta(0)}\ .$$

Τότε ισχύει η (6.9) με το dχτM(χ2) να αντικαθίσταται από το Cf,γ. Οι δύο παράγοντες στον παρονομαστή συγκρίνουν τη βοηθητική βάση με το eχ, και τις δύο συμπαγείς βάσεις υπό στρέψη, αντίστοιχα. Μια μεταβολή γf ν(X)γf πολλαπλασιάζει τόσο τη συνάρτηση όσο και το Cf,γ με ν(0) 1 , ενώ η βοηθητική βάση ακυρώνει. Τέλος, οποιεσδήποτε δύο ανυψώσεις στο Α της περιόδου που καθορίζεται στο βάρος ένα διαφέρουν κατά μία μονάδα στο 1+XA, και επομένως δίνουν την ίδια συνάρτηση βάρους-ένα.

Τέλος, εκφράζουμε την παραγοντοποίηση με βάση την αναλυτική κυκλοτομική μεταβλητή, η οποία δίνει ο τύπος του Θεωρήματος Α.

Πόρισμα 6.5 (Η κυκλοτομική μεταβλητή). Στην τετριμμένη συνιστώσα Teichmüller, η παραγοντοποίηση του Θεωρήματος 6.3 έχει ως εξής: L cpt (f, j) = Cf,γ M jL KL (6.10) (χ1, 1 + j)L

$$\pi \qquad \pi \qquad \overset{\text{Κανάλι Νικομήδους}}{\pi}(\chi_{\ 2}^{\ 1}\omega,\ j).$$

Στο άρτιο ω a $^{\text{ένα}}$-συνιστώσα, οι δύο χαρακτήρες πρέπει να αντικατασταθούν από χ1ω a και χ $2^{1+a\,\omega,}$ πολλαπλασιαστές(M)και ο συντελεστής αγωγιμότητας πρέπει να

Απόδειξη. Επιλέξτε μια τοπολογική γεννήτρια u του Γ1, γράψτε Gβ(u s T = u σειρά 1) = L $\overset{\text{Κανάλι Νικομήδους}}{\pi}$(β, 1 s), και βάλτε

j 1. Σε αυτήν τη μεταβλητή, η ταυτότητα σε χαρακτήρες πεπερασμένης τάξης περιλαμβάνει τις δύο δυνάμεις

$$G\chi 1\ (1+T)\ \text{που}\ {}^{1}\ {}^{1}_{,\ G\chi\ 1\ \ 2\ \omega}\ u(1+T)\ \ 1\ \ ,$$

αντιστοιχούν στα ορίσματα 1 + j και j στη σύμβασή μας, ενώ το μέτρο Dirac δίνει M j [M]
1 Δεδομένου ότι τα φραγμένα μέτρα καθορίζονται από τις τιμές τους σε πεπερασμένη τάξη a ·j δίνει του αγωγού p r με r 2, αυτό αποδεικνύει τον τύπο. Αξιολόγηση σε δήλωση ω για τις άλλες συνιστώσες. τους χαρακτήρες

6.5. Αλλαγή της ενότητας περιόδου. Η συμπαγής εξειδίκευση του Θεωρήματος 6.3 είναι μη μηδενική, αλλά μπορεί να αποκτήσει μηδέν όταν μεταφέρεται σε διαφορετική ενότητα περιόδου. Για την συνομολογία της ανοιχτής καμπύλης μονάδων, η απόκλιση προέρχεται από τις ακμές: ο περιορισμός είναι ένας ισομορφισμός στα γενικά πηλίκα των ακμών, αλλά ο πυρήνας του στο σημείο Eisenstein μπορεί να είναι μη μηδενικός. Αυτό είναι το οικογενειακό αντίστοιχο της σύγκρισης πλέγματος της §3.2, και το μήκος αυτού του πυρήνα μετρά την τάξη εξαφάνισης της εικόνας του συμπαγούς μέτρου.

Όπως στο [PR25, §2.2 και Παράρτημα Α] (βλ. ειδικότερα τις Προτάσεις Α.7 και Α.11 και το Πόρισμα Α.12 εκεί), η σύγκριση πρέπει να γίνει πριν από την εξειδίκευση. Παρατηρήστε, ωστόσο,

Machine Translated by Google

ότι η ενότητα V Το c (f) της τοποθεσίας ορίζεται χρησιμοποιώντας συμπαγή υποστήριξη στην ανοιχτή καμπύλη, ενώ
Η ενότητα περιόδου μας χρησιμοποιεί το H1 της συμπύκνωσης και ένα προσημασμένο πηλίκο. Το όριο
το μήκος πρέπει επομένως να υπολογιστεί για την παρούσα υλοποίηση, και το κάνουμε παρακάτω για το
βοηθητική ενότητα Drinfeld-Manin.

Πρόταση 6.6. Για g {f,f0}, έστω Pg,op το πηλίκο οικογένειας χωρίς στρέψη με πρόσημο του
συνομολογία της ανοιχτής καμπύλης, που σχηματίζεται με την άλγεβρα Hecke που χρησιμοποιείται στην (6.2). Και οι δύο ενότητες είναι
ελεύθερο από βαθμό ένα πάνω από το A, και ο περιορισμός προκαλεί ένεση

$$jg : P_{g,cpt} \quad P_{g,op}$$

με πυρήνα πεπερασμένου μήκους. Επιπλέον, η συστροφή κατεβαίνει και στις δύο υλοποιήσεις, και στο τετράγωνο

$$\begin{array}{ccc} P_{f,cpt} & \xrightarrow{t_{\eta,cpt}} & P_{f0,cpt} \\ \downarrow{\scriptstyle jf} & & \downarrow{\scriptstyle jf0} \\ P_{f,op} & \xrightarrow[t_{\eta,op}]{} & P_{f0,op} \end{array}$$

μετακινήσεις. Επιλέξτε βάσεις και γράψτε

$$jg(\gamma_{g,cpt}) = c_g(X)\gamma_{g,op}, \qquad t_{\eta,\bullet}(\gamma_{f,\bullet}) = b_{\eta,\bullet}(X)\gamma_{f0,\bullet}.$$

Τότε cg A \ {0}, και

$$c_{f0}\, b_{\eta,cpt} = b_{\eta,op} c_f, \qquad {}^{\text{μεγάλο}}{}^{\text{εγώ}}_{g,op} = c_g(X)L \quad {}^{cpt}_{\pi}\ (\text{σολ}),$$

(6.11)

όπου $L_{g,op}^{\text{εγώ}} := (jg \quad 1)L_{g,cpt}$ είναι η εικόνα του συμπαγούς μέτρου και των βαθμωτών συναρτήσεων
λαμβάνονται στις υποδεικνυόμενες βάσεις. Τέλος,

$$\text{length}_A \operatorname{coker}(jg) = \text{ord}_X(c_g).$$

Απόδειξη. Η ακολουθία εντοπισμού για Y1 X1 έχει οριακούς όρους Eisenstein, άρα περιορισμός
είναι ένας ισομορφισμός στα γενικά πηλίκα του κυστιδίου. Συνεπώς, το προσημημένο ανοιχτό πηλίκο
έχει γενική τάξη ένα και είναι ελεύθερο μετά την αφαίρεση της στρέψης. Για περιορισμό ακολουθείται από το
ανοιχτός χάρτης πηλίκου, κάθε σχέση στο συμπαγές οικογενειακό πηλίκο μηδενίζεται γενικά, και
επομένως μηδενίζεται πάνω από το A επειδή ο στόχος δεν παρουσιάζει στρέψη, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.1.
Αυτό δίνει jg ως προς το A. Δεδομένου ότι μια μη μηδενική απεικόνιση μεταξύ ελεύθερων ενοτήτων κατάταξης ένα σε ένα διακριτό
Ο δακτύλιος αποτίμησης είναι αμφιμονοσήμαντος, με πυρήνα A/(cg) στην περίπτωσή μας, ακολουθεί ο τύπος μήκους.

Το ίδιο επιχείρημα κατεβαίνει στρεβλά στην ανοιχτή συνομολογία. Οι αντιστοιχίες γεωμετρικού ίχνους μετατίθενται με
περιορισμό, επομένως το τετράγωνο μετατίθεται τόσο πριν όσο και μετά τη μετάβαση στο
οικογένειας πηλίκων. Εφαρμόζοντας το τετράγωνο στο γf,cpt δίνεται η πρώτη ταυτότητα στο (6.11), και εφαρμόζοντας
jg στο μέτρο που έχει τιμές ενότητας και λαμβάνοντας τη συντεταγμένη του σε γg,op, προκύπτει το δεύτερο.

Η ακόλουθη παρατήρηση περιγράφει τον κύριο όρο αυτού του μέτρου εικόνας. Η ταύτισή του με
ένα ανεξάρτητα κατασκευασμένο μέτρο στην ανοιχτή συνομολογία απαιτεί περαιτέρω σύγκριση,
την οποία διατυπώνουμε παρακάτω για τις περιόδους του Κάτω.

Παρατήρηση 6.7 (Ο κύριος όρος σε ένα μέτρο εικόνας). Γράψτε cf(X) = Xmv(X), με v A×,
στην Πρόταση 6.6. Τότε το μέτρο εικόνας ικανοποιεί

$$\text{ord}_X L = m, \ {}^{\text{εγώ}}_{X} mL = v(0)L_{f,op} f_{,op} X=0 \quad {}^{\text{εγώ}} \quad {}^{cpt}_{\pi}\ (\text{φά}). \tag{6.12}$$

Πράγματι, η εικόνα είναι $Xm_v(X)L \quad {}^{cpt}_{\pi}(f)$, και ο συμπαγής συντελεστής του έχει μη μηδενική ειδική ίνα από
Θεώρημα 6.3. Παρατηρήστε ότι η τάξη αναφέρεται στη συνάρτηση μετρούμενης τιμής και σε ένα άτομο
Η κυκλοτομική ροπή μπορεί να έχει ένα επιπλέον μηδέν. Επομένως, το m = 0 δίνει έναν τύπο για την τιμή,
ενώ το m = 1 δίνει έναν τύπο για την πρώτη παράγωγο στην κατεύθυνση του βάρους. Για να εφαρμοστεί
αυτή την παρατήρηση στην p-αδική L-συνάρτηση του Kato, πρέπει να προσδιορίσουμε το μέτρο της σε τιμές ενότητας
με μια τέτοια εικόνα.

Machine Translated by Google

Η τάξη m δεν αλλάζει αν επιλέξουμε διαφορετική βάση για οποιαδήποτε από τις δύο μονάδες, και για να την προσδιορίσουμε χρειάζεται το οριακό πηλίκο της συγκεκριμένης υλοποίησης. Για την βοηθητική οικογένεια, οι Shih–Wang υπολογίζουν ένα τέτοιο πηλίκο μέσω της κατασκευής Drinfeld–Manin, την οποία υπενθυμίζουμε τώρα. Στο [SW21, §3.2], το HΘ ορίζεται ως η αντίστροφη εικόνα, εντός ανοιχτής συνηθισμένης συνομολογίας, της μοναδικής οριακής γραμμής Eisenstein ΛΘeΘ,1(1). Το πηλίκο Drinfeld–Manin είναι

είναι

$$H\Theta,DM = H\Theta \quad H \qquad \Theta \quad \omega^{*}\Theta,$$

όπου H είναι το πηλίκο μιας τάξης συμπλήρωσης, η άλγεβρα Hecke και το $\omega^{*}\Theta$ είναι η τάξη συμπλήρωσης, η άλγεβρα Hecke και το $\omega^{*}\Theta$ είναι η σταθερή στρέψης ενότητα εντός της ορθολογικής συμπαγούς συνομολογίας, όπου περιέχει την ολοκληρωτική συμπαγή ενότητα. Το μοναδικό οριακό πηλίκο της είναι ΛΘ/(ξΘ), που παράγεται από την εικόνα του {0, }Θ,DM.

Πρόταση 6.8 (Ο βοηθητικός χάρτης περιόδου Drinfeld–Manin). Για f0 = E1(1, χ 1) ord, θεωρήστε το μονοσυνοριακό πρότυπο Drinfeld–Manin HΘ,DM του [SW21, §3.2], όπου Θ = χω. Πάρτε το αρνητικό πρόσημο και την συστροφή Tate (1), εντοπίστε την στον πρώτο αριθμό εξαιρετικών βαρών και ολοκληρώστε την στο A. Αν Pf0,DM δηλώνει την προκύπτουσα γραμμή, τότε ο φυσικός χάρτης ταιριάζει σε μια ακριβή ακολουθία

$$0 \qquad Pf0,cpt \qquad Pf0,DM \qquad A/(X) \qquad 0.$$

Συνεπώς, η εικόνα του μη μηδενικού συμπαγούς αρθρωτού μέτρου σε αυτήν τη γραμμή Drinfeld-Manin έχει ένα απλό μηδέν στη μεταβλητή βάρους.

Απόδειξη. Από το [SW21, Πρόταση 3.3], το πηλίκο της ενότητας Drinfeld–Manin με συμπαγή συνομολογία είναι ΛΘ/(ξΘ), που παράγεται από την εικόνα του {0, }Θ,DM, και αυτή η γεννήτρια βρίσκεται στο αρνητικό πρόσημο. βλέπε επίσης [SW21, Πόρισμα 3.4]. Η ίδια ενότητα ταυτοποιεί το (ξΘ) με τον εξαιρετικό πρώτο αριθμό βαρών μετά τον εντοπισμό, έτσι ώστε η συμπλήρωση να δίνει A/(X). Η εντοπισμένη άλγεβρα Hecke με συμπαγές πρόσημο είναι A, και η ενότητα συμπαγούς προσήμου της είναι απαλλαγμένη από βαθμό ένα από το [SW21, Πρόταση 3.5]. Δεδομένου ότι η ενότητα Drinfeld–Manin είναι απαλλαγμένη από στρέψη του ίδιου βαθμού, λαμβάνουμε την εμφανιζόμενη ακολουθία. Επομένως, μια μη μηδενική συμπαγής εξειδίκευση αποκτά ακριβώς έναν παράγοντα του X στην εικόνα της.

Αυτός ο χάρτης περιόδου συμπεριφέρεται διαφορετικά από τον χάρτη Sharifi (6.6). Η συμπερίληψη στη γραμμή Drinfeld-Manin γίνεται μηδέν modulo X, ενώ ο χάρτης Sharifi είναι ένας ισομορφισμός στην ειδική ίνα της συμπαγούς συνομολογίας. Συγκεκριμένα, η δεύτερη δεν παραγοντοποιείται μέσω της πρώτης. Αυτό είναι σύμφωνο με το [SW21, απόδειξη του Θεωρήματος 1.2]: οι κλάσεις (1 U){0, }Θ,DM που χρησιμοποιούνται εκεί ανήκουν ήδη στη συμπαγή συνομολογία, ενώ το μη τροποποιημένο σύμβολο ορίου δεν ανήκει.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την υπόλοιπη σύγκριση. Διορθώστε την υλοποίηση του αρθρωτού συμβόλου στον μεταφερόμενο νόμο αμοιβαιότητας Kato της Υπόθεσης 5.9, και έστω ότι PK_{φ} συμβολίζει το προσημασμένο οικογενειακό πηλίκο χωρίς στρέψη, το οποίο είναι ένα A-μοντέλο τάξης ς ένα, και L το αρθρωτό μέτρο του πριν επιλέξουμε μια βάση. Δεδομένου ότι η κατασκευή του Kato ξεκινά από μονάδες Siegel στην ανοιχτή αρθρωτή καμπύλη, η ανοιχτή συνομολογία και το πηλίκο Drinfeld-Manin είναι οι φυσικοί υποψήφιοι για αυτήν την υλοποίηση.
Η γενική ταύτιση με το κυστίδιο καθορίζει μια σύγκριση ως προς το L((X)), και το ερώτημα είναι εάν και πώς εκτείνεται κατά μήκος του σημείου Eisenstein.

Ερώτηση 6.9 (Σύγκριση των περιόδων Kato και των συμπαγών περιόδων). Επεκτείνεται η γενική σύγκριση του cupsidal σε έναν χάρτη που προκαλείται από τις επιλεγμένες συνομολογικές πραγματοποιήσεις;

$$jK : Pf,cpt \qquad PK \qquad \varphi ,$$

για την οποία τα μέτρα που αποτιμώνται από την ενότητα ικανοποιούν

$$\text{μεγάλο}^{K}_{\varphi\acute{\alpha}} = (jK \quad 1)L\ f,cpt \qquad ;$$

Machine Translated by Google

Και οι δύο ενότητες και τα μέτρα τους καθορίζονται από τις κατασκευές τους. Εάν αυτή η σύγκριση ισχύει, γράψτε

$$jK(\gamma f) = XmK\, vK(X)\gamma \qquad \overset{K}{\text{στ.}}$$

Τότε το mK είναι το μήκος του πυρήνα κωκ, και η (6.12) δίνει τον τύπο του κύριου όρου με m = mK και v = vK. Ο βοηθητικός υπολογισμός Drinfeld-Manin προτείνει μια πρώτη παράγωγο εάν αυτή είναι η υλοποίηση που επιλέγεται από τις περιόδους του Kato, αλλά πρέπει να προσδιοριστεί η ταυτοποίηση, συμπεριλαμβανομένης αυτής των μετρήσεων που έχουν τιμές μονάδας, πριν αντιστοιχιστεί αυτή η σειρά στην p-αδική L-συνάρτηση του Kato.

6.6. Εφαρμογή στον συντελεστή κυκλικής μονάδας. Τέλος, εφαρμόζουμε την συμπαγή παραγοντοποίηση στην κλάση Kato της Ενότητας 5.3. Υπενθυμίζουμε ότι ο νόμος αμοιβαιότητάς της περιλαμβάνει την βοηθητική τιμή, τον συζυγή παράγοντα και τη σύγκριση με συμπαγείς περιόδους. Αντιμετωπίζοντας αυτούς τους τρεις παράγοντες μαζί, λαμβάνουμε τον συντελεστή της κλάσης κυκλικής μονάδας χωρίς την απλή μηδενική υπόθεση της Ενότητας 5.2.

Ορίστε την τετριμμένη συνιστώσα Teichmüller και έναν μη μηδενικό κυκλοτομικό παρονομαστή d, ανεξάρτητο από το X, ο οποίος επαρκεί για τον ρυθμιστή. Ορίστε

$$D = (e0\text{НГ})[1/d],\ R = D[[X]].$$

Ο δακτύλιος D φέρει την κυκλοτομική μεταβλητή, ενώ το X μεταβάλλει το βάρος. Τότε το R είναι απαλλαγμένο από στρέψη X και το R/XR = D είναι ένα πεδίο ορισμού, και η εργασία σε αυτή την ολοκλήρωση μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τις τάξεις στη μεταβλητή βάρους χωρίς να επιλέξουμε μια κυκλοτομική ροπή.

Το Μέρος (iii) της Υπόθεσης 5.9, μαζί με την (6.4), συγκρίνει την γενική αρθρωτή γραμμή περιόδου με την συμπαγή. Συγκεντρώνοντας όλους τους παράγοντες που εξαρτώνται από το βάρος, συμπεριλαμβανομένης αυτής της σύγκρισης, σε ένα μόνο βαθμωτό, μπορούμε να γράψουμε

$$(6.13)\qquad F(X) := L\quad (\text{locp}\ \kappa(f)) = E(f)(X),\qquad N(X, j)\, r(X)\, L\, \text{cpt}\qquad \pi\qquad r\quad L((X)).$$

Εδώ η βαθμωτή r(X) είναι ανεξάρτητη από το j σύμφωνα με την Υπόθεση 5.9(iii), και E B Το R περιέχει το (0, διατηρήθηκαν οι ήπιοι παράγοντες Euler, κανονικοποιημένοι έτσι B j) δεν είναι ταυτόσημα μηδέν (ατομικό ώστε E να επιτρέπονται κυκλοτομικά μηδενικά). η κοινή του δύναμη X έχει συμπεριληφθεί στο r. Πιο συγκεκριμένα, αν Lp(f) = q(X)L π^{cpt}(f) και EN = E B e(X) στην κανονικοποίηση που καθορίστηκε πριν, τότε

$$r(X) = e(X)q(X)\qquad \frac{\Lambda o\xi_{\pi}\quad (\text{φά})}{\text{Lp(Διαφήμιση f)}}.$$

Στην αναλυτική περίοδο κανονικοποίησης της §5.2, το q δεν έχει πόλο: η αναλυτικότητα του Lp(f) και η μη μηδενική συμπαγής εξειδίκευση στην (6.4) το υπονοούν άμεσα. Η τάξη του r, ωστόσο, περιλαμβάνει επίσης το e και το βοηθητικό προς το συζυγές πηλίκο, επομένως θεωρούμε το γινόμενο ως σύνολο.

Για μια γενική κλάση στο M[1/X] που ικανοποιεί την Υπόθεση 5.9(ii), το κριτήριο (5.13) προσδιορίζει την κανονικότητα της κλάσης με ordX r 0, επειδή οι άλλοι δύο παράγοντες έχουν μη μηδενικό γινόμενο στο X = 0. Στην Πρόταση 5.11, αυτή η κανονικότητα προκύπτει από την απλή μηδενική κανονικοποίηση. Εδώ υποθέτουμε αντ' αυτού κανονικότητα της κλάσης όπως στο μέρος (i), τη χρησιμοποιούμε για να εξειδικεύσουμε τον πλήρη πολλαπλασιαστή r και εφαρμόζουμε τη συμπαγή παραγοντοποίηση για να υπολογίσουμε τον προκύπτοντα συντελεστή κυκλικής μονάδας.

Πόρισμα 6.10 (Κάτο και κυκλικές μονάδες). Υποθέτουμε (6.1), α≠ 1, και Υπόθεση 5.9. Τότε η συνάρτηση r στην (6.13) είναι κανονική στο X = 0, και στην τετριμμένη συνιστώσα Teichmüller, (0, j)Cf,γ

$$(6.14)\qquad \kappa(f)\chi 1 = \frac{r(0)E\quad B}{\alpha\varphi}\quad M\qquad jL\ \text{ЌL}\ (\chi\ 2\ \omega,\quad {}^{1}\ j)c(\chi 1)$$

πάνω από το KΓ. Αν ο συντελεστής είναι αναλυτικός, η ισότητα ισχύει στο Sχ1 . Η εξειδικευμένη κλάση είναι μη μηδενική αν και μόνο αν r(0)≠ 0.

Απόδειξη. Τα μέρη (i) και (ii) της Υπόθεσης 5.9 καθιστούν τον βαθμωτό ρυθμιστή F κανονικό. Για να δούμε τι ισχύει (f), αυτό συνεπάγεται για r, βάλτε G = E NL π^{cpt} έτσι ώστε F = rG και G(0)≠ 0 από το Θεώρημα 6.3 και το N. Αν r = Xnv με v κανονικοποίηση του E A× και n < 0, τότε αναγωγικά X nF = vG modulo

Machine Translated by Google

Το X δίνει 0 = ν(0)G(0), μια αντίφαση. Έτσι r A, με την περίπτωση r = 0 άμεση. Μπορούμε τώρα να ειδικεύσουμε την (6.13). χρησιμοποιώντας την (5.14), λαμβάνουμε

$$\text{af Col}\chi_1 (\text{resp } \kappa(f)\chi_1) = r(0)E \qquad N(0, j)L \qquad \pi^{cpt} (\sigma\tau, \iota).$$

Αντικαθιστώντας την συμπαγή παραγοντοποίηση (6.10), η δεξιά πλευρά εκφράζεται ως γινόμενο των δύο συναρτήσεων Dirichlet. Από την (5.4) και τη σύμβαση πεπερασμένων χαρακτήρων, η πρώτη είναι ακριβώς ο ρυθμιστής της c(χ1) στην ίδια κυκλοτομική μεταβλητή. Είναι μη μηδενική, επομένως μπορεί να ακυρωθεί ως προς το KΓ, και οι δύο πλευρές της (6.14) έχουν τον ίδιο καθολικό ρυθμιστή. Η Πρόταση 5.6 προσδιορίζει στη συνέχεια τις κλάσεις. Εάν ο συντελεστής είναι αναλυτικός, και οι δύο πλευρές βρίσκονται στο Sχ1 και η ελευθερία στρέψης δίνει την ισότητα εκεί. Η μη μηδενική ισχύς των παραγόντων και του ρυθμιστή κυκλικής μονάδας δίνει τον τελικό ισχυρισμό.

Αν και το r και οι περίοδοι εξαρτώνται από τις επιλεγμένες βάσεις, ο συντελεστής της κυκλικής μονάδας τότε της δεν εξαρτάται. Εάν το γf αντικατασταθεί από το u(X)γf, το (fi) πολλαπλασιάζεται με το u και το r με το u, επομένως το γινόμενο r(0)Cf,γ παραμένει αμετάβλητο. Ομοίως, η αλλαγή της κανονικής βάσης Dieudonne αναδιαμορφώνει τα F, r και af συμβατά, και ο συντελεστής στην (6.14) παραμένει και πάλι αμετάβλητος. Από την άλλη πλευρά, ένας κύριος συντελεστής τάξης m > 0 εξαρτάται επίσης από την επιλογή της παραμέτρου: η αντικατάσταση του X με το X′ = u(X)X πολλαπλασιάζει το X mL | 0 κατά u(0) m.

κλάσης L opt 1

Κλείνουμε με δύο σχόλια σχετικά με την κανονικοποίηση. Πρώτον, οι βοηθητικοί και οι συζυγείς παράγοντες προέρχονται από την κλάση Kato του [PR25, Ορισμός 4.6 και Πρόταση 4.9]. Για ένα στοιχείο ζήτα του οποίου ο νόμος αμοιβαιότητας περιλαμβάνει μια ενιαία αρθρωτή p-αδική L-συνάρτηση, ο πολλαπλασιαστής θα αποτελείται αντ' αυτού από τη σύγκριση περιόδων και τους διατηρημένους παράγοντες Euler. Η σύγκριση και των δύο κανονικοποιήσεων στο X = 0 απαιτεί τη μεταφορά των κλάσεων πριν από τη διαίρεση με τη βοηθητική τιμή, συμπεριλαμβανομένης της κανονικότητάς τους στην υλοποίηση του διαχωρισμού.

Δεύτερον, ας υποθέσουμε ότι ο χάρτης περιόδων της Ερώτησης 6.9 έχει τάξη ένα και ότι κανένας άλλος παράγοντας δεν συμβάλλει σε μηδέν ή πόλο. Τότε η ενέσιμη φύση του ρυθμιστή αναγκάζει την κλάση να μηδενιστεί στο βάρος ένα, και μια σύγκριση για την παράγωγο βάρους της θα απαιτούσε έλεγχο της διαίρεσης με το X και της αλλαγής βάσης. Ο βοηθητικός υπολογισμός Drinfeld-Manin υποδηλώνει αυτή την πιθανότητα, αν και δεν καθορίζει τη σειρά για την υλοποίηση του Kato.

Απομένει να προσδιοριστεί εάν ο εξειδικευμένος συντελεστής είναι μη μηδενικός, πράγμα που ισούται με υπολογίζοντας την τάξη του r. Εάν οι παράγοντες είναι μη μηδενικοί, ο ορισμός του r δίνει

$$\text{ordX } r = \text{ordX } e + \text{ordX } q + \text{ordX } L \qquad \pi^{\text{βοηθητικό}} (\sigma\tau) \qquad \text{ordX } Lp(\text{Ad } f).$$

Το πόρισμα 6.10 δείχνει ότι αυτός ο ακέραιος αριθμός είναι μη αρνητικός και r(0)≠ 0 ακριβώς όταν είναι μηδέν. Επομένως, το εναπομείναν πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί η ισορροπία μεταξύ των βοηθητικών, των συζυγών και των τακτικών περιόδων στην σταθερή κανονικοποίηση Kato. Η συμπαγής παραγοντοποίηση παρέχει την τιμή μη μηδενικού βάρους-ένα, αλλά δεν καθορίζει αυτές τις τακτικές ξεχωριστά.

7. Κύκλοι Heegner και ελλειπτικές μονάδες

Έχοντας συγκρίνει τις κλάσεις Kato με κυκλικές μονάδες στο κυκλοτομικό περιβάλλον, στρεφόμαστε σε ελλειπτικές μονάδες πάνω από ένα φανταστικό τετραγωνικό πεδίο. Οι αντίστοιχες γεωμετρικές κλάσεις είναι κλάσεις Heegner, και η σύγκριση λαμβάνει χώρα σε μια αντικυκλοτομική μετατόπιση του χώρου χαρακτήρων του Katz. Ο εντοπισμός τους βρίσκεται ήδη στη θετική συνήθη κατεύθυνση, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ρυθμιστή του απευθείας, όπως στο [LR24, §C3].

Στο βάρος ένα, τα δύο συστατικά Eisenstein δίνουν δύο κλάσεις ελλειπτικών μονάδων. Η παραγοντοποίηση της p-αδικής L-συνάρτησης υποδηλώνει τον πολλαπλασιασμό κάθε κλάσης με τη συνάρτηση Katz του άλλου συστατικού. Για να συγκρίνουμε αυτόν τον συνδυασμό με την εξειδικευμένη κλάση Heegner, πρέπει πρώτα να ελέγξουμε ότι ικανοποιεί την ίδια τοπική συνθήκη στο p.

Machine Translated by Google

7.1. Katz p-αδικές L-συναρτήσεις και ελλειπτικές μονάδες. Έστω K ένα φανταστικό τετραγωνικό πεδίο στο οποίο

$$pOK = pp^{-}$$

διασπάται, όπου το p καθορίζεται από τη σταθερή ενσωμάτωση $Q \quad Qp$. Υποθέτουμε την υπόθεση Heegner του [JLZ21, §2.1], δηλαδή ότι κάθε πρώτος αριθμός που διαιρεί το ήπιο επίπεδο N διασπάται στο K, και επιλέγουμε ένα ιδανικό N OK τέτοιο ώστε $OK/N \quad Z/NZ$. Για απλότητα της παρουσίασης, θα υποθέσουμε ότι το K έχει την κλάση νούμερο ένα και ότι το $K \neq Q(\quad 1), Q(\quad 3)$, αν και καμία από τις δύο υποθέσεις δεν είναι απαραίτητη για το επιχείρημα.

Έστω σ και $^{-}$σ τις δύο ενσωματώσεις $K \quad Qp$, διατεταγμένες έτσι ώστε το σ να αντιστοιχεί στο p. Ακολουθούμε τις συμβάσεις του [JLZ21, §2.1] για τους τύπους απείρου. Έτσι, αν $a \quad b \quad 0 \pmod{wK}$, όπου $wK = \#O^{\times}$ καθορίζει έναν αλγεβρικό χαρακτήρα Großen του αγωγού ένα K, β ο χαρακτήρας $\sigma \, a\sigma^{-}$

και ο τύπος απείρου (a, b).

Αφήνω

$$\Gamma K = Gal(K(mp \quad)/K), \quad WK = Homcts(\Gamma K, Gm),$$ όπου m είναι ένας

σταθερός ιδανικός πρώτος αριθμός του p, διαιρούμενος με το N και με τους αγωγούς των χαρακτήρων Hecke πεπερασμένης τάξης που χρησιμοποιούνται παρακάτω, και $K(mp^{\nu})$ είναι η ένωση των πεδίων κλάσης ακτίνων με μέτρο ελαστικότητας mp. Δουλεύουμε κατά συνιστώσες, καθορίζοντας τους πεπερασμένους χαρακτήρες. Ο υποχώρος των χαρακτήρων που δεν διακλαδώνονται μακριά από το p είναι ο χώρος του [LR24, §B4.2], και το διευρυμένο μέτρο ελαστικότητας ακτίνων μας επιτρέπει να εξετάσουμε το μη τετριμμένο ήμερο μέρος του χαρακτήρα ξ0 που εισάγεται παρακάτω. Κάθε συνιστώσα έχει δύο p-αδικές κατευθύνσεις. το αντικυκλοτομικό πηλίκο που χρησιμοποιείται παρακάτω έχει μία. Γράψτε $H(\Gamma K) = O(WK)$ για την άλγεβρα των τοπικών αναλυτικών κατανομών. Συμβολίζουμε με

$$jK : GK \quad H(\Gamma K)^{\times}$$

καθολικός χαρακτήρας. Οι συμβάσεις μας για τον χάρτη αμοιβαιότητας είναι αυτές του [JLZ21, §2.3.2]: ο γεωμετρικός Frobenius αντιστοιχεί σε έναν ομογενοποιητή. Για έναν χαρακτήρα Hecke ξ, γράψτε $\xi = Vp(\xi)$ για το avatar Galois του· συγκεκριμένα $Vp(Nm) = L(\quad 1)$. Σύμφωνα με το [LR24, §B4.2], το σημείο του χώρου χαρακτήρων που φέρει την ένδειξη ξ είναι το σημείο στο οποίο το jK ειδικεύεται στο $\xi \quad 1$. Αυτό το αντίστροφο είναι μέρος της σύμβασης Mellin, και επομένως η εξειδίκευση του $Vp(\Psi) \quad (1 \quad jK)$ στο ξ είναι $Vp(\Psi) \quad (1) \quad \xi$.

Έστω Ψ ένας πεπερασμένης τάξης χαρακτήρας Großen του K, του πρώτου αγωγού ως προς το p, με τιμές σε μια πεπερασμένη επέκταση L/Qp. Χρησιμοποιούμε την p-αδική L-συνάρτηση δύο μεταβλητών του Katz και το ελλειπτικό σύστημα μονάδων με σταθερό μέτρο ακτίνας m, διατηρώντας τους τοπικούς παράγοντες στις πρώτες τιμές του. Αυτό δίνει μια αναλυτική συνάρτηση

$$\Lambda_{\pi}^{Katz} \quad (\Psi) \quad H(\Gamma K) \quad QpQ \text{ αριθ. } \pi \ .$$

Ο τύπος παρεμβολής του, στο εύρος που μας ενδιαφέρει, έχει την ακόλουθη μορφή. Αν ξ είναι ένας χαρακτήρας του αγωγού ένα και του απείρου τύπου (a, b), με $a \quad 1$ και $b \quad 0$, τότε

$$\frac{\Lambda_{\pi}^{Katz}(\Psi)(\xi)}{\Omega_{\pi}^{\alpha \ \beta}} \quad a(\xi)ep(\Psi, \xi)dK(\xi) \ \Omega a \quad b \ , \qquad \frac{L(\Psi\xi = \quad^{1}, 0)}{} \tag{7.1}$$

όπου

$$a(\xi) = (a \quad 1)!\pi \ b/2 \quad b \text{ και } \quad^{\beta}, \qquad ep(\Psi, \xi) = 1 \quad p \quad ^{1\Psi} \quad 1 \ \xi(p) \ 1 \quad \xi \quad 1\Psi(p^{-}) \ ,$$

$dK(\xi) = D^{2}$ πιθανές μιγαδικές και p-αδικές Εδώ η DK είναι η απόλυτη διακρίνουσα του K, και τα Ω και Ωp είναι συμβατά-

περίοδοι CM. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [Kat76] και [BDP12, Θεώρημα 3.1] για την ακριβή κανονικοποίηση. Όταν το σταθερό ήμερο μέρος είναι μη τετριμμένο, πρέπει επίσης να συμπεριληφθούν οι αντίστοιχοι τοπικοί παράγοντες, με τον παραπάνω τύπο του αγωγού-ένα να είναι μόνο η κανονικοποίηση αναφοράς. Τόσο για τις συγκρίσεις Katz όσο και για τις συγκρίσεις Heegner, χρησιμοποιούμε μια κοινή επέκταση συντελεστών που περιέχει τις επιλεγμένες περιόδους CM.

Παρατηρήστε ότι το πεπερασμένο μέρος της αντικυκλοτομικής μετατόπισης καθορίζεται από το δεδομένο Heegner και δεν μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητα. Γράψτε $\epsilon f = \chi 1\chi 2$ για τον περιττό τύπο νεμπέν της μορφής βάρους-ενός και επιλέξτε έναν χαρακτήρα Großen λ0 πεπερασμένου τύπου (1, N, ϵf) και απείρου.

Machine Translated by Google

τύπος (0, 1) στη σύμβαση του [JLZ21, Ορισμός 2.1.1]. Ο περιορισμός πεπερασμένου τύπου του είναι αυτός που περιγράφεται εκεί. Η ύπαρξη προκύπτει από το [JLZ21, Παρατήρηση 2.1.2], αφού ϵf (1) = 1 και = {±1}. Έστω ξ0 = Nm λ0, απείρου τύπου (1, 0), όπου Nm είναι ο χαρακτήρας της νόρμας Hecke O K τύπου (1, 1). Έστω Γac η ομάδα Galois της $\times$ αντικυκλοτομικής επέκτασης Zp του K, και έστω Wac ο χώρος χαρακτήρων της, με την πεπερασμένη συνιστώσα σταθερή όπως παραπάνω. Χρησιμοποιούμε τη μετάφραση

$$\text{ιac} : \text{Wac} \quad \text{WK, j} \quad \xi j := \xi 0(\sigma/\sigma^{-}) \quad \text{ι} .$$

Ο τύπος απείρου του είναι (1 + j, j), και το εύρος παρεμβολής Katz περιέχει τους ακέραιους αριθμούς j 0 της σταθερής πεπερασμένης συνιστώσας. Ο παράγοντας κανόνα, μαζί με την αντίστροφη σύμβαση Mellin που μόλις καθορίσαμε, παρέχει την απαιτούμενη συστροφή Tate για να αντιστοιχιστούν οι συντελεστές ελλειπτικών μονάδων με εκείνους των κλάσεων Heegner (βλ. (7.4) παρακάτω). Δεδομένου ότι ο χαρακτήρας ξ0 έχει ένα μη τετριμμένο πεπερασμένο μέρος, οι τοπικοί παράγοντες αυτού του πεπερασμένου μέρους πρέπει να συμπεριληφθούν στη σύγκριση παρεμβολής.
Γράφουμε Hac για την επιλεγμένη συνιστώσα του H(Γac) και Kac για το κλασματικό του πεδίο. Οι οπισθοδρομήσεις κατά μήκος του iac συχνά θα παραμένουν έμμεσες.

Το σύστημα Euler των ελλειπτικών μονάδων δίνει μια κλάση

$$( ) \qquad \kappa(\Psi, K) \quad H1\ K, Vp(\Psi) \quad (1 \quad jK) \ (7.2) \text{ όπου} \quad ,$$

δηλώνει το ανακλαστικό περίβλημα. Σε χαρακτήρες πεπερασμένης τάξης του πλήρους χώρου δύο μεταβλητών, αυτή η κλάση ειδικεύεται στην εικόνα Kummer ενός κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού μονάδων ή S-μονάδων σε μια αβελιανή επέκταση του K, όπου το S περιέχει τους πρώτους αγωγούς. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [Kat04, §15] ή στο [BCD+14, §1.2] για μια περιγραφή της κατασκευής.

Ο ρυθμιστής Perrin-Riou δύο μεταβλητών του [LZ14] δίνει έναν χάρτη Coleman Colp,Ψ : H1

$$\text{Kp, Vp}(\Psi) \quad (1 \quad jK) \text{ και ο ρητός νόμος} \qquad H(\Gamma K),$$

αμοιβαιότητας για ελλειπτικές μονάδες έχει την εξής μορφή (7.3)

$$\text{Colp,}\Psi \text{ αντί } \kappa(\Psi, K) = L \quad \overset{\text{Κατζ}}{\pi} \quad (\Psi).$$

Ως συνήθως, αυτή η ισότητα ενσωματώνει τους τοπικούς παράγοντες Euler στην ομαλοποίηση της συνάρτησης Katz.

7.2. Κλάσεις Heegner σε οικογένειες και η τοπική τους προβολή. Έστω

$$f = E1(\chi 1, \chi 2)$$

είναι η ακανόνιστη σειρά Eisenstein βάρους-ένα που ορίζεται παραπάνω, με τύπο νέμπεντ ϵf = χ1χ2. Έστω Ψi η μεταβολή της βάσης Hecke του χi σε K. Στη γεωμετρική σύμβαση Frobenius του [LR24, §B4.1],
Έχουμε Vp(Ψi) = L(χ = L(χi) |GK . Σημειώστε ότι η υπόθεση Heegner αποκλείει την περίπτωση ϵf = εK, αφού τότε οι διακλαδωμένοι πρώτοι αριθμοί του K θα διαιρούσαν το N. Αντίθετα, το πεπερασμένο μέρος του λj εξηγεί τον τύπο νεμπέν στην παρακάτω σχέση αυτοδυαδικότητας.

Έστω f η επιλεγμένη γενικά cuspidal συνηθισμένη οικογένεια στο U. Δουλεύουμε πάνω στην αντίστροφη εικόνα της στο EK(N, ϵf), τον χώρο των συζυγών-αυτο-δυϊκών συστροφών του [JLZ21, Ορισμός 2.4.2]. αυτή η κατασκευή επιτρέπει έναν μη τετριμμένο τύπο νεμπένθου και δεν απαιτεί τετραγωνική ρίζα του χαρακτήρα βάρους. Στην ίνα βάρους-ένα λαμβάνεται λj = ξj Nm 1 απείρου τύπου (j, 1 j). ,
Γράψτε καπέλα για τους σχετικούς p-αδικούς χαρακτήρες Galois. Η συνθήκη πεπερασμένου τύπου δίνει

$$\lambda j \lambda c\ j \quad = \epsilon\, f \quad 1 \quad |GK\ \epsilon, \qquad \lambda j = \varepsilon \xi j \ . \tag{7.4}$$

Η δεύτερη ταυτότητα προκύπτει από την Vp(Nm) = L(1). Μόλις καθοριστεί η υλοποίηση του συντελεστή διαίρεσης, προκύπτει

$$Vf \quad \lambda j \quad \overset{2}{\underset{i=1}{}} \quad Vp(\Psi i) \quad \overset{*}{} \quad (1) \quad \xi j \ .$$

Το δεξί μέρος αποτελείται ακριβώς από τις εξειδικεύσεις των συντελεστών ελλειπτικής μονάδας Vp(Ψi) (1 jK). Από την άλλη πλευρά, στο [JLZ21, §2.3] η αναπαράσταση Vp(f) ορίζεται χρησιμοποιώντας, επομένως οι συντελεστές Heegner γεωμετρικό Φρόμπενιους, και συμφωνεί με το V f μας , $\overset{*}{}$ Vp(f) λj έχουν τη μορφή

Machine Translated by Google

την αριστερή πλευρά. Με αυτόν τον τρόπο, η δυϊκή, η συστροφή Tate και η αντίστροφη σύμβαση Mellin σταθεροποιούνται ταυτόχρονα.

Έστω V η προκύπτουσα αναπαράσταση Galois δύο μεταβλητών ως προς O(U) H (Γac) μετά την επιλογή της τοπικής τομής του χώρου στρέψης μέσω του λ0 από την f,K , κανονικοποιημένη ώστε να είναι συζυγής-αυτο-δυϊκή.

Η κατασκευή του [JLZ21] δίνει μια μεγάλη κλάση Heegner κ(f, K) H1 K, V

$$\varphi,K\,, \tag{7.5}$$

των οποίων οι αριθμητικές εξειδικεύσεις είναι οι εικόνες Abel-Jacobi των γενικευμένων κύκλων Heegner, έως τους σαφείς παράγοντες σταθεροποίησης p που εμφανίζονται στην ό.π.

συνηθισμένη διήθηση Γ προκαλεί μια διήθηση στο βαθμωτό πηλίκο

τριγωνικών (φ, Γ)-μονάδων στο p, 0 F+D F D D

Η κατασκευή της οικογένειας και ο νόμος της αμοιβαιότητάς της είναι διαθέσιμοι στον κυστειδικό τόπο. Στο σημείο Eisenstein χρειαζόμαστε την ακόλουθη είσοδο, την οποία κρατάμε για το υπόλοιπο της ενότητας.

Υπόθεση 7.1 (Κανονική εξειδίκευση των κλάσεων Heegner). Η οικογένεια, τα πεπερασμένα συστατικά του χαρακτήρα της και οι αυτοδυϊκές της αναστροφές βρίσκονται στο εύρος του νόμου κατασκευής και της αμοιβαιότητας του [JLZ21] στον κυστειδικό τόπο. Επιπλέον, η κλάση Heegner, η θετική τοπική της κατεύθυνση και ο θετικός ρυθμιστής της εκτείνονται κανονικά στο xf στην επιλεγμένη υλοποίηση, της οποίας η ίνα διασπάται όπως στο (7.9) παρακάτω.

Ορίζουμε το μη μηδενικό βαθμωτό Ωf,γ συγκρίνοντας τον εξειδικευμένο ρυθμιστή με τον ρυθμιστή στις επιλεγμένες βάσεις βάρους-ένα. Η Υπόθεση 7.1 επιτρέπει στην τοπική συνθήκη της οικογένειας να περάσει σε βάρη ένας.

Πρόταση 7.2. Σύμφωνα με την Υπόθεση 7.1, ο εντοπισμός του κ(f, K) στο p ανήκει στην εικόνα του

$$H^1(K_p, F^+D^{ac}) \xrightarrow{\varphi,K} H^1(K_p, D^{ac})\,.$$

Αντίστοιχα, η εικόνα του κάτω από τη φυσική προβολή

$$H^1(K_p, D^{ac}) \xrightarrow{\varphi,K} H^1(K_p, F^-D^{ac})$$

είναι μηδέν.

Απόδειξη. Στα κρυσταλλικά κλασικά σημεία στο εύρος παρεμβολής, οι κλάσεις Heegner είναι εικόνες αλγεβρικών κύκλων υπό τον p-αδικό χάρτη Abel-Jacobi, και ως εκ τούτου ικανοποιούν την τοπική συνθήκη Bloch-Kato. Συγκεκριμένα, οι προβολές τους στο αρνητικό πηλίκο κατά ένα μηδενίζονται. Δεδομένου ότι αυτά τα σημεία είναι πυκνά κατά Zariski και η συνομολογία του αρνητικού πηλίκου είναι απαλλαγμένη από στρέψη στην άλγεβρα συντελεστών, ο ισχυρισμός προκύπτει από άκαμπτη αναλυτική συνέχεια.

Αυτό ακριβώς ισχύει στο [JLZ21, Θεώρημα 6.3.4]· βλέπε επίσης [LR24, Πρόταση C3.3].

Ως εκ τούτου, αξιολογούμε την κλάση Heegner μέσω του ρυθμιστή στο θετικό κομμάτι, όπως στο [LR24, §C3.4]. Συμβολίζουμε την εξειδικευμένη ενότητα συντελεστή με V και τη συνθήκη Heegner Selmer με FHg: χρησιμοποιεί την εξειδικευμένη θετική κατεύθυνση στο p, τη συζυγή συνθήκη στο p^- και τις επιλεγμένες μη διακλαδωμένες ή επιτρεπόμενες από αγωγό συνθήκες μακριά από το p. Σύμφωνα με την Υπόθεση 7.1, ο ισομορφισμός σταθερής περιόδου γ δίνει μια κλάση στο xf κ(f, K) H1 FHg K, V

και ένας ρυθμιστής

$$\Lambda^+_{f,K} : H^1(K_p, F^+V^{ac}) \xrightarrow{\varphi,K} H(\Gamma_{ac}).$$

Ο ρητός νόμος αμοιβαιότητας του [JLZ21] έχει τη μορφή (7.6)

$$\Lambda^+_{f,K} \text{ resp } \kappa(f, K) = \Omega \quad 1\ f,\gamma L \quad \text{ΑΕΠ}_{\pi} \quad (\varphi\acute{\alpha}),$$

Machine Translated by Google

όπου L_p^{BDP} Το (f) υποδηλώνει την εξειδίκευση βάρους-ένα της οικογενειακής BDP. Η p-αδική L-συνάρτηση στο ο νόμος της αμοιβαιότητας, και Ωf,γ $L_o^{\times}$ μετρά την απόκλιση μεταξύ της εξειδίκευσης του οικογενειακός ρυθμιστής και ο επιλεγμένος ρυθμιστής μας στο f.

7.3. Η παραγοντοποίηση BDP–Katz. Ο ρυθμιστής Heegner δίνει μια συνάρτηση BDP, ενώ οι ρυθμιστές ελλειπτικών μονάδων δίνουν συναρτήσεις Katz. Ο διαχωρισμός του Vf υποδηλώνει τη σύγκριση του τετραγώνου της συνάρτησης BDP με το γινόμενο των δύο συναρτήσεων Katz. Βάλτε

$$\Lambda_i := \Lambda_p^{\text{Κατζ}}(\Psi_i)_{\iota ac(Wac)}, \qquad i = 1, 2,$$

και

$$L_{BDP} := L_p^{\text{ΑΕΠ}}(\text{φά})_{\text{Γουάκ}}.$$

Η μετατόπιση του κανόνα στην επιλογή μας για μετάφραση ταιριάζει με τα σύνθετα επιχειρήματα. Στο σχετικό αριθμητικούς χαρακτήρες, ο φορμαλισμός Artin δίνει

$$L(f/K, \lambda_{1j_1}) = \prod_{i=1}^{2} L(\Psi_i\lambda_j, 1)^1 = \prod_{i=1}^{2} L(\Psi_i\xi_j, 0)^1,$$

αφού $\lambda_j^1 = \mathrm{Nm}\,\xi_j^1$ και ο κανόνας Hecke μετατοπίζει το s σε s 1. Έτσι, οι μιγαδικές τιμές ταιριάζουν με εκείνες στον τύπο παρεμβολής του Katz. Η υπόλοιπη σύγκριση αφορά τους παράγοντες παρεμβολής και τις περιόδους.

Διατηρούμε την Υπόθεση 7.1. Για τη σύγκριση των αναλυτικών συναρτήσεων χρειαζόμαστε, εκτός από τον νόμο της οικογενειακής αμοιβαιότητας, συμβατούς τύπους παρεμβολής με βάρος ένα· συγκρίνετε [LR24, §C3.5] για το αντίστοιχο της κρίσιμης κλίσης.

Υπόθεση 7.3 (Συμβατότητα παρεμβολής). Η εξειδικευμένη συνάρτηση BDP και οι δύο συναρτήσεις Katz δέχονται συμβατούς τύπους παρεμβολής σε ένα κοινό σύνολο Σ αριθμητικών χαρακτήρων που καθορίζει μερομορφικές συναρτήσεις στην επιλεγμένη συνιστώσα. Πιο συγκεκριμένα, οι τύποι αναφέρονται στο παραπάνω μοτίβο Rankin, με συμβατές αλγεβρικές περιόδους, και, γράφοντας Ci(ν) για τις προκύπτουσες αλγεβρικές τιμές βαθμού ένα, παίρνουν τη μορφή = b(ν)C1(ν)C2(ν),

$$L_{BDP}(\nu)^2 \qquad L_i(\nu) = k_i(\nu)C_i(\nu) \quad (\nu \quad \Sigma).$$

Εδώ τα b και ki καταγράφουν τους τοπικούς παράγοντες παρεμβολής και τις κανονικοποιήσεις περιόδου. Υποθέτουμε ότι k1(ν)k2(ν)≠ 0 για ν Σ, και ότι το πηλίκο b/(k1k2) εκτείνεται σε μια συγκεκριμένη μερομορφική συνάρτηση A (f, K) στην επιλεγμένη συνιστώσα.

Πρόταση 7.4 (σύγκριση BDP–Katz). Σύμφωνα με την Υπόθεση 7.3, έχουμε (7.7)

$$_{\text{μεγάλο}}{}^{2}_{\text{ΑΕΠ}} = A(f, K)\, L_1 L_2.$$

Απόδειξη. Για κάθε ν Σ, οι τύποι παρεμβολής δίνουν $L_{BDP}(\nu) = (b/k_1k_2)(\nu)\, L_1(\nu)L_2(\nu)$, όπου χρησιμοποιούμε ότι $k_1(\nu)k_2(\nu)^2 \neq 0$. Σημειώστε ότι δεν απαιτείται διαίρεση με τις αλγεβρικές L-τιμές Ci(ν). Δεδομένου ότι το Σ καθορίζει μερομορφικές συναρτήσεις στη συνιστώσα, ακολουθεί η ταυτότητα.

Διατηρούμε το A(f, K) μερομορφικό, εκτός εάν οι τοπικοί παράγοντες και η σύγκριση περιόδων τόσο στον αριθμητή όσο και στον παρονομαστή είναι αναλυτικές μονάδες. Σε αυτήν την περίπτωση, πρόκειται για αναλυτική μονάδα. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτού του παράγοντα περιλαμβάνει την αξιολόγηση CM με βάση το βάρος ένα και τις περιόδους του.

Οι δύο χαρακτήρες Katz σχετίζονται με τη συναρτησιακή εξίσωση. Πράγματι, η μετάφραση της (7.4) πίσω στους χαρακτήρες Hecke δίνει =

$$\lambda_j\lambda_{\iota}^{\text{νοο}} \Psi_1\Psi_2\,\mathrm{Nm}\quad 1 \qquad , \qquad \xi_j\xi_{\iota}^{\text{νοο}} = \Psi_1\Psi_2\,\mathrm{Nm}.$$

Δεδομένου ότι $\Psi_c = \Psi_i$, οι χαρακτήρες $A_i = \Psi_i\lambda_j^1$ και $\Theta_i = \Psi_i\xi_j^1$ ικανοποιώ

$$A_2 = A_1^{c}\mathrm{Nm}, \quad \Theta_2 = \Theta\quad c\qquad 1^{\mathrm{Nm}}\quad 1. \tag{7.8}$$

Machine Translated by Google

Επομένως, οι τιμές στο s = 1, αντίστοιχα στο s = 0, σχηματίζουν ένα ζεύγος που σχετίζεται με τη συναρτησιακή εξίσωση. Αυτή η σχέση χρησιμοποιεί το πεπερασμένο μέρος της αυτοδυϊκής συστροφής και ισχύει χωρίς να επιβάλλει Ψ2 = Ψ 1 . Ωστόσο, για να αντικατασταθεί το L1L2 από ένα τετράγωνο σε μια σταθερή p-αδική κανονικοποίηση, πρέπει επίσης να συγκριθούν οι περίοδοι CM και οι τοπικοί παράγοντες της συναρτησιακής εξίσωσης Katz σε αυτήν τη μετατόπιση, και αυτοί οι παράγοντες μπορεί να έχουν μηδενικά ή πόλους. Για αυτόν τον λόγο διατηρούμε το γινόμενο στην (7.7), η οποία είναι η μορφή άμεσα συμβατή με τους δύο νόμους αμοιβαιότητας ελλειπτικών μονάδων.

7.4. Η κλάση σταθμισμένων ελλειπτικών μονάδων. Έστω

$$V_i^{ac} := \iota_{ac}^{*} V_p(\Psi_i)^{*} (1 \quad jK), \qquad i = 1, 2,$$

και συμβολίζουμε με

$$\text{χρήστης} := \iota_{ac}^{*} \kappa(\Psi_i, K) \quad H1(K, V \quad {}^{ac}_{-})$$

οι αντίστοιχες αντικυκλοτομικές κατηγορίες ελλειπτικών μονάδων. Μετά τον καθορισμό του ισομορφισμού εξειδίκευσης γ στο σημείο βάρους-ένα, υπάρχει μια αποσύνθεση (7.9)

$$V \quad {}^{ac}_{\text{τα}} Lvf,\chi 1 \quad V\, f,K \text{ Στην (7.9)}, {}^{ac}_{1} \quad Lvf,\chi 2 \quad V \quad {}^{ac}_{2}.$$

διανύσματα vf,χi απλώς επισημαίνουν τους δύο αθροιστές, αφού η ενέργεια του χαρακτήρα περιλαμβάνεται ήδη στο V ac i . Κανονικοποιούμε αυτά τα διανύσματα συμβατά με το γ. Η αλλαγή αυτής της κανονικοποίησης πολλαπλασιάζει και τις δύο πλευρές της τελικής σύγκρισης με το ίδιο μη μηδενικό βαθμωτό.

Ορισμός 7.5. Η σταθμισμένη κλάση ελλειπτικών μονάδων που σχετίζεται με το (f, K) είναι u(f,

$$K) := vf,\chi 1 \quad L2u1 + vf,\chi 2 \quad L1u2 \quad H1\, K, V\, {}^{ac}_{f,K} \quad . \quad (7.10)$$

Σύμφωνα με τους νόμους αμοιβαιότητας ελλειπτικών μονάδων, και οι δύο σταθμισμένοι αθροιστές έχουν ρυθμιστή L1L2. Για να μετατρέψουμε αυτήν την ισότητα στην τοπική συνθήκη Heegner, πρέπει να προσδιορίσουμε τη θετική ευθεία που επιλέγεται από την οικογένεια με τη ευθεία των ίσων συντεταγμένων σε αυτές τις κανονικοποιήσεις Coleman. Αυτή η συμβατότητα δεν καθορίζεται από την ισότητα των δύο τοπικών χαρακτήρων, επομένως τη διατηρούμε ως ρητή υπόθεση για το υπόλοιπο της ενότητας.

Υπόθεση 7.6 (Συμβατότητα με τη συνήθη τοπική συνθήκη). Η εξειδικευμένη θετική γραμμή έχει μη μηδενική προβολή σε καθεμία από τις δύο γραμμές χαρακτήρων στην (7.9). Έστω Qi η τοπική ενότητα συνομολογίας Iwasawa του V στο p. Αυτές οι ενότητες είναι απαλλαγμένες από βαθμό ένα, και υπάρχουν ισομορφισμοί ai : Qi Q σε μια κοινή ενότητα βαθμού ένα, έτσι ώστε οι χάρτες Coleman να έχουν ενέσιμη συνάρτηση Col. Σύμφωνα με την (7.9), η εξειδικευμένη στέλνει ένα τέτοιο, θετική τοπική συνθήκη είναι Coli = Col ai {(x1, x2) : a1(x1) = a2(x2)}, και ο ρυθμιστής της

ζεύγος στην κοινή τιμή Coleman Col(a1(x1)) = Col(a2(x2)).

Οι τοπικές συνθήκες στο p¯ είναι συμβατές με αυτήν την περιγραφή υπό σύζευξη, συμπεριλαμβανομένων των πεπερασμένων συστροφών και των βαρών των κλάσεων ελλειπτικών μονάδων. Μακριά από το p, οι κλάσεις ικανοποιούν τις επιλεγμένες συνθήκες Selmer χωρίς διακλάδωση ή με επιτρεπόμενο αγωγό.

Πρόταση 7.7. Σύμφωνα με την Υπόθεση 7.1 και την Υπόθεση 7.6, η κλάση u(f, K) ικανοποιεί τις ίδιες τοπικές συνθήκες με την εξειδικευμένη κλάση Heegner κ(f, K). Συγκεκριμένα, u(f, K) H1 ac f,K .

FHg K, V

Απόδειξη. Μακριά από το p, ο ισχυρισμός είναι μία από τις δηλωμένες τοπικές συνθήκες, σύμφωνη με την διακλάδωση των ελλειπτικών μονάδων στους πρώτους αγωγούς. Στο p, χρησιμοποιούμε την (7.9) και την εξειδίκευση του συνηθισμένου φιλτραρίσματος που επιλέγεται από την οικογένεια f. Με τις καθορισμένες ταυτοποιήσεις ai, , εφαρμόζοντας τον ενέσιμο χάρτη Col στη διαφορά που ορίζει το τοπικό πηλίκο, δίνεται

$$L2\, Colp,\Psi 1 \text{ (resp } u1) \quad L1\, Colp,\Psi 2 \text{ (resp } u2).$$

Από την (7.3), αυτό είναι

$$L2L1 \quad L1L2 = 0.$$

Machine Translated by Google

Λόγω της ενέσιμης φύσης του χάρτη Coleman πρώτης τάξης, η αντίστοιχη τοπική κλάση συνομολογίας μηδενίζεται. Τέλος, η συνθήκη στο p^- προκύπτει από τη συμβατότητα συζεύξεων που περιλαμβάνεται στην υπόθεση, και επομένως το $u(f, K)$ ανήκει στην ομάδα Heegner Selmer.

Παρατήρηση 7.8. Η Πρόταση 7.7 είναι το ανάλογο της επαλήθευσης της ισορροπημένης τοπικής συνθήκης για την σταθμισμένη κλάση Beilinson-Flach στο [AOPR26, §5.3]. Μόλις οι τοπικές αναγνωρίσεις της Υπόθεσης 7.6 είναι διαθέσιμες, η αναλυτική παραγοντοποίηση προσδιορίζει έναν συνδυασμό συστημάτων Euler πρώτης τάξης που ικανοποιούν την τοπική συνθήκη Heegner.

Παράδειγμα 7.9. Οι συνθήκες αγωγού και Heegner μπορούν να ικανοποιηθούν εκτός της περίπτωσης CM.
Για παράδειγμα, έστω $M = 19$, έστω ζ_{18} μια πρωτόγονη δέκατη όγδοη ρίζα της μονάδας, και έστω ϑ ο χαρακτήρας modulo 19 με $\vartheta(2) = \zeta_{18}$. Έστω

$$\chi_1 = \vartheta^2, \qquad \chi_2 = \vartheta^5, \; p = 83, \; K = \mathbb{Q}(\sqrt{-67}), \; N = 192 .$$

Ο λόγος $\chi_1\chi_2^{-1} = \vartheta^3$ έχει τάξη έξι και είναι πρωτογενής. Έχουμε $83 = 19 \cdot 18 + 1$. Αφού $83^6 \equiv 7^2 \pmod{19}$, και οι δύο χαρακτήρες λαμβάνουν την τιμή $\zeta_{18}^{12} \neq 1$ στο 83. Το πεδίο K έχει την κλάση αριθμό ένα, και τόσο το 19 όσο και το 83 χωρίζονται σε αυτό: τα σχετικά τετραγωνικά κατάλοιπα είναι $67 \equiv 9 \pmod{19}$ και το $83 \equiv 16 \pmod{67}$. Η επιλογή ενός πρώτου αριθμού $n \mid 19$ και $N = n^2$ περιττός τύπος νεμπέντ ϑ^7 ικανοποιεί τη συνθήκη ισοτιμίας πεπερασμένου τύπου για λ_0. Αυτά τα δεδομένα επομένως ικανοποιούν τις συνθήκες αγωγού και Heegner. Η σύγκριση των κλάσεων απαιτεί επίσης τακτική εξειδίκευση, συμβατή παρεμβολή και τοπικούς ρυθμιστές, καθώς και τις συνθήκες Selmer στο Θεώρημα 7.10 παρακάτω.

7.5. Σύγκριση κλάσεων. Και οι δύο κλάσεις ικανοποιούν τώρα τις ίδιες τοπικές συνθήκες. Γράψτε

$$Ш(f, K) := H^1_{ac}(f,K)\{p\} \cong H^1_{fin}(K, V)\{p\}$$

Οι νόμοι αμοιβαιότητας ελλειπτικών μονάδων δίνουν

$$\text{μαγιάς}^+_{f,K} \text{ αντίστοιχα } u(f, K) = \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2, \tag{7.11}$$

όπου ο θετικός ρυθμιστής αξιολογείται στην κοινή συντεταγμένη $a_1(x_1) = a_2(x_2)$ από την Υπόθεση 7.6.

Θεώρημα 7.10. Υποθέστε τις Υποθέσεις 7.1 και 7.3, και την Υπόθεση 7.6. Υποθέστε ότι $Ш(f, K)$ απαλλαγμένο από στρέψη τάξης ένα σε σχέση με το H_{ac} και $\Lambda^+_{f,K}$ resp είναι μη μηδενικό σε αυτό. Τότε, στο $Ш(f, K)$ H_{ac} είναι ότι $\mathcal{L}_{ac}$, έχουμε

$$\Lambda_{f,K}(u(f, K)) = \Omega_{f,\gamma}\mathcal{L}_{BDP}\kappa(f, K). \tag{7.12}$$

Αν το $\Lambda(f, K)$ είναι αναλυτικό και και οι δύο κλάσεις ανήκουν στο $Ш(f, K)$, η ισότητα ισχύει και στο ίδιο το $Ш(f, K)$.
Σημειώστε ότι αυτή είναι μια πρόταση πάνω στην υποδεικνυόμενη άλγεβρα συντελεστών, μετά την αντιστροφή του p, και όχι πάνω σε ένα ολοκληρωτικό $\mathcal{OL}$-πλέγμα.

Απόδειξη. Από την (7.11) και την Πρόταση 7.4, η εικόνα της αριστερής πλευράς της (7.12) κάτω από τον ρυθμιστή είναι

$$\Lambda_{f,K}(u(f, K))\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}^2_{BDP}.$$

Από την άλλη πλευρά, ο ρητός νόμος αμοιβαιότητας (7.6) δίνει

$$\Lambda^+_{f,K} \text{ resp}(\Omega_{f,\gamma}\mathcal{L}_{BDP}\kappa(f, K)) = \mathcal{L}^2_{BDP}.$$

Έτσι, οι δύο πλευρές έχουν την ίδια εικόνα για $\mathcal{L}_{f,K}$ μη μηδενικό σε μια $^+_{\text{ενότητα}}$ resp, η οποία είναι ενεστωτική επειδή είναι χωρίς στρέψη βαθμού ένα.

Ο επιπλέον παράγοντας $\mathcal{L}_{BDP}$ στην (7.12) υπαγορεύεται επομένως από την αμοιβαιότητα: ο ρυθμιστής Heegner δίνει έναν παράγοντα BDP, ενώ ο ρυθμιστής σταθμισμένης ελλειπτικής μονάδας δίνει το τετράγωνό του.

Machine Translated by Google

Παρατήρηση 7.11. Το Θεώρημα 7.10 είναι το αντικυκλοτομικό ανάλογο πρώτης τάξης του θεωρήματος σύγκρισης του [AOPR26]. Το λεξικό είναι

ρύθμιση διαγώνιου κύκλου	ρύθμιση παρόντος τριπλού γινομένου p-
adic L-συνάρτηση BDP	p-adic L-συνάρτηση δύο συναρτήσεις Hida–Rankin
σταθμισμένες κλάσεις Beilinson–Flach	δύο συναρτήσεις Katz
σταθμισμένες κλάσεις ελλειπτικών μονάδων	κλάση διαγώνιου κύκλου
	Μάθημα κύκλου Heegner.

Και στις δύο περιπτώσεις, η παραγοντοποίηση του τετραγώνου μιας μεγαλύτερης p-αδικής L-συνάρτησης καθορίζει έναν σταθμισμένο συνδυασμό δύο μικρότερων συστημάτων Euler, στα οποία κάθε κλάση πολλαπλασιάζεται με την p-αδική L-συνάρτηση του συμπληρωματικού συστατικού. Η προκύπτουσα κλάση συγκρίνεται στη συνέχεια με τη γεωμετρική κλάση, αφού πολλαπλασιαστεί η τελευταία με ένα αντίγραφο της μεγαλύτερης p-αδικής L-συνάρτησης.

Παρατήρηση 7.12. Εάν η συναρτησιακή εξίσωση προσδιορίσει τους δύο παράγοντες Katz και υπάρχει επίσης συμβατή αναγνώριση των δύο γραμμών συντελεστών και των ελλειπτικών μονάδων τους, ο τύπος ανάγεται σε σύγκριση με ένα μόνο σύστημα ελλειπτικών μονάδων και τότε έχει το σχήμα [LR24, Θεώρημα C3.9]. Παρατηρήστε, ωστόσο, ότι η ισότητα των δύο βαθμωτών συναρτήσεων Katz δεν επαρκεί για να προσδιορίσει τις δύο καθολικές συναρτήσεις συνομολογίας.

8. Διπλή εκφύλιση Eisenstein

Οι προηγούμενες συγκρίσεις υποδεικνύουν το ερώτημα τι συμβαίνει όταν δύο αρθρωτές μεταβλητές ειδικεύονται σε σημεία Eisenstein. Ξεκινώντας με τις κλάσεις Beilinson-Flach, κάποιος θα λάμβανε πρώτα κλάσεις Kato και στη συνέχεια θα αναζητούσε μια σύγκριση με κυκλικές μονάδες όπως στην Ενότητα 5. βλέπε Παρατήρηση 8.9 για το γιατί δεν ακολουθούμε αυτήν την οδό. Ξεκινώντας με διαγώνιους κύκλους, τα αντίστοιχα δύο βήματα οδηγούν στις κλάσεις Beilinson-Flach και στη συνέχεια στις κλάσεις Beilinson-Kato. Μελετάμε αυτήν τη δεύτερη οδό εδώ, διατηρώντας την υπόλοιπη αρθρωτή οικογένεια cuspidal.

Η πρώτη σύγκριση ακολουθεί το [AOPR26] και η δεύτερη μοντελοποιείται στο [BDV22]. Η αναλυτική παραγοντοποίηση σε κάθε βήμα καθορίζει το βάρος κάθε συστατικού χαρακτήρα. Για να συνδυάσουμε τις δύο συγκρίσεις, χρειαζόμαστε η πρώτη ταυτότητα να εξειδικεύεται τακτικά στο δεύτερο σημείο Eisenstein και οι κλάσεις που προκύπτουν να ικανοποιούν τις τοπικές συνθήκες που χρησιμοποιούνται στη δεύτερη σύγκριση.

8.1. Οι δύο εξειδικεύσεις Eisenstein. Έστω f, g και h τρεις p-αδικές οικογένειες αρθρωτών μορφών για τις οποίες η διαγώνια κυκλική κλάση κ(f, g, h) H1 Q, V †

φγκ

ορίζεται. Εδώ, όπως συνήθως, ο εκθέτης † ενσωματώνει την αυτοδυϊκή συστροφή. Υποθέτουμε ότι οι οικογένειες f και h ειδικεύονται στα σημεία xf και xh σε ακανόνιστες σειρές Eisenstein βάρους ένα, ενώ η οικογένεια g παραμένει ακανθώδης σε όλες τις δύο εξειδικεύσεις.

Για το πρώτο σημείο Eisenstein, χρησιμοποιούμε μια οικογένεια CM και γράφουμε

$$f = fxf = E1(1, \varepsilon K), \text{ όπου } K/Q$$

είναι φανταστικό τετραγωνικό, εK είναι ο τετραγωνικός χαρακτήρας του και το p διαιρείται στο K. Σε όλη αυτή την ενότητα, το f υποδηλώνει αυτό το σημείο CM. Δεν είναι η μορφή κοινού αγωγού των Ενοτήτων 5–7.
Μετά τη μεγέθυνση του L, η επιλεγμένη υλοποίηση CM δίνει

$$Vf = L \cdot vf,1 \quad L \cdot vf,\varepsilon K .$$

Τα διανύσματα vf,1 και vf,εK είναι καθορισμένα μια για πάντα· όλες οι περίοδοι που εμφανίζονται παρακάτω εξαρτώνται από αυτήν την επιλογή.

Για το δεύτερο σημείο του Eisenstein, γράψτε

$$h = hxh = E1(\psi 1, \psi 2),$$

Machine Translated by Google

ώστε

$$Vh = L \cdot vh,1 \quad L \cdot vh,2, \text{ H GQ επενεργεί στην } L \cdot vh,j \text{ μέσω } \psi j .$$

Για το h υποθέτουμε την υλοποίηση διαχωρισμού που εμφανίζεται παραπάνω και την τοπική συμβατότητα που ορίζεται στην §8.3. Και τα δύο στοιχεία χαρακτήρων διατηρούνται.

Για να προσδιορίσουμε τους δακτυλίους στους οποίους ειδικευόμαστε, επιλέγουμε συνδεδεμένες αφινοειδή γειτονιές με τις άλγεβρες Af , Ag και Ah πάνω από το L, και διευρύνουμε το L έτσι ώστε τα xf , xh να είναι ρητά. Διορθώνουμε τις πεπερασμένες συνιστώσες και την τετραγωνική ρίζα στην αυτοδυϊκή συστροφή, περνώντας σε μια πεπερασμένη κάλυψη etale εάν είναι απαραίτητο. Αν mf και mh είναι τα ιδεώδη των δύο σημείων, οι διαδοχικές άλγεβρες είναι $R3 = Af \quad LAg \quad LAh$, $Rf = R3/mfR3 \quad Ag$

$$LAh, Rf,h = Rf /mhRf \quad Ag.$$

Σε συμβατές αναγόμενες μη αναγώγιμες συνιστώσες, γράψτε αυτές τις δύο τελευταίες περιοχές ως Rf και Rf,h, με κλασματικά πεδία Kf και Kf,h. Όταν δεν μπορεί να προκύψει σύγχυση, τις συντομεύουμε σε R και K στο στάδιο που συζητείται. Δεδομένου ότι η κυκλοτομική μεταβλητή Rankin περιορίζεται παρακάτω στον κεντρικό τόπο, η τελική ταυτότητα ποικίλλει μόνο ως προς το g.

Απαιτούμε την κανονικότητα στο xh των κλάσεων και των παραγόντων σύγκρισης που εξειδικεύουμε, αφού καθαρίσουμε τους δηλωμένους παρονομαστές. Παρατηρούμε ότι η εξειδίκευση γίνεται σε αυτές τις ενότητες πριν από τη μετάβαση στο Kf,h, καθώς μια μερομορφική ταυτότητα από μόνη της δεν μπορεί να αξιολογηθεί στο xh. Η προκύπτουσα ισότητα ισχύει τότε σε μια μη εντοπισμένη ενότητα κάθε φορά που και οι δύο πλευρές ανήκουν στην ίδια ενότητα χωρίς στρέψη.

Υπάρχουν δύο διαδοχικές αναλύσεις της εξειδικευμένης αναπαράστασης:

$$V \dagger_{fgh\ xf} \quad V \dagger_1 \quad V \dagger \quad \varepsilon K ,$$

και

$$V \dagger_{xh} \quad V \dagger_{i,1} \quad V \dagger_{i,2} , \quad i \quad \{1, \varepsilon K\}.$$

Οι τέσσερις αναπαραστάσεις $V \dagger$ είναι συστροφές δεύτερης τάξης της αναπαράστασης που συνδέεται με το g, και ως εκ τούτου είναι οι φυσικές ενότητες συντελεστών για τις τέσσερις κλάσεις Beilinson-Kato που εμφανίζονται στο τέλος της διπλής εκφύλισης.

Εργαζόμαστε στο μη εξαιρετικό εύρος των ρυθμιστικών αρχών και διατηρούμε τους παράγοντες Euler τους. Α Ένας παράγοντας εξαφάνισης που καταστρέφει την ενέσιμη ικανότητα θα απαιτούσε ξεχωριστό επιχείρημα.

8.2. Από διαγώνιους κύκλους σε κλάσεις Beilinson-Flach. Αρχικά εξειδικεύουμε τη μεταβλητή f στο xf . Έστω

$$\kappa_1^{BF} = \kappa(g, h), \qquad \kappa_{\varepsilon K}^{BF} = \kappa(g, h \quad \varepsilon K) \text{ δηλώνουν}$$

τις δύο κλάσεις Beilinson-Flach που λαμβάνονται από τα δύο στοιχεία χαρακτήρων του Vf .
Οι ακριβείς αυτο-δυϊκές τους αναστροφές γίνονται κατανοητές στη σημειογραφία και λαμβάνουν τιμές σε

$$H1 (Q, V \dagger) \text{ και } H1 (Q, V \dagger \quad \varepsilon K),$$

αντίστοιχα.

Αφήνω

$$\text{μεγάλο}_1 = L g p \quad h, 2 \quad \frac{\ell + m \quad 1 g,}{} , \qquad \text{μεγάλο}_{\varepsilon K} = L g p \quad h \quad \varepsilon K, 2 \quad \frac{\ell + m \quad 1 g,}{}$$

να είναι οι δύο p-αδικές L-συναρτήσεις Hida-Rankin με κυρίαρχο το g που εμφανίζονται στην παραγοντοποίηση με φορμαλισμό Artin. Εδώ τα ℓ και m αντιπροσωπεύουν τα βάρη των g και h. Ομοίως, γράφουμε Lg για την p-αδική L-συνάρτηση τριπλού γινομένου με κυρίαρχη μεταβλητή g, η οποία διακρίνεται από μια συνάρτηση Hida-Rankin από τα τρία ορίσματά της. Μέχρι τον ρητό Euler και τον παράγοντα περιόδου Etri, αυτή η παραγοντοποίηση έχει τη μορφή

$$\Lambda \gamma_\pi(\varphi, \gamma, \upsilon) \quad ^2 = \text{Etri } L \quad _1 \text{μεγάλο} \quad _{\varepsilon K} . \tag{8.1}$$

Machine Translated by Google

Ο παράγοντας Etri είναι το πηλίκο της τοπικής παρεμβολής και των παραγόντων περιόδου στην αναφερόμενη παραγοντοποίηση, περιορισμένη στο xf , και η ακόλουθη σύγκριση χρησιμοποιεί τις ίδιες κανονικοποιήσεις. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τις κανονικοποιήσεις του [AOPR26] για τους νόμους αμοιβαιότητας, και υποθέτουμε ότι σε αυτές τις κανονικοποιήσεις ο παράγοντας Etri απορροφάται στον νόμο αμοιβαιότητας για κ(f, g, h), μαζί με τον παράγοντα Atkin-Lehner και την περίοδο που παρουσιάζεται παρακάτω, έτσι ώστε να μην εμφανίζεται στην (8.2). διαφορετικά, θα εμφανιζόταν εκεί ως ένας επιπλέον ρητός παράγοντας.

Η παραγοντοποίηση (8.1) υποδηλώνει τον πολλαπλασιασμό κάθε συνιστώσας Beilinson-Flach με το Hida-Συνάρτηση Rankin που σχετίζεται με το άλλο στοιχείο.

Ορισμός 8.1. Η σταθμισμένη κλάση Beilinson-Flach που συνδέεται με το (f, g, h) είναι

$$\mathrm{BFwt}(f,g,h) = \mathrm{vf},1 \quad L \quad {}_{\varepsilon K}^{\text{Διάφορα διανύσματα}} \quad \kappa \, {}_{1}^{BF} + \mathrm{vf},\varepsilon K \quad L \quad {}_{1\,\kappa\,\varepsilon K}^{\text{Διάφορα διανύσματα}} \quad {}^{BF}\,.$$

Θεωρείται ως στοιχείο του

$$H1\ Q, V\ \dagger \qquad \varphi\gamma\kappa \; {}_{xf} \qquad R\ K.$$

Με τις κανονικοποιήσεις της (8.1), και οι δύο σταθμισμένες συνιστώσες έχουν ρυθμιστή L HR Ц HR Για εK ·

την πρώτη σύγκριση, πρέπει αρχικά να χρησιμοποιηθεί μια τοπική συνθήκη η οποία είναι ελαφρώς από το ισορροπημένο. Βάλτε V = V † $fgh\,{}_{xf}$ μεγαλύτερη . Με κατανοητή την κοινή αυτο-δυϊκή συστροφή, καθορίζω

$$F\ 2V = Vf \quad V \quad {}_{\sigma\lambda}^{+} \quad V \; {}_{\omega}^{+} + V\,f^{+} \quad Vg \quad V \; {}_{\omega}^{+} + V\,f^{+} \quad V \; {}_{\sigma\lambda}^{+} \quad Vh^{\dagger},$$

$$F\ G \quad +V = Vf \quad V \quad {}_{\sigma\lambda}^{+} \quad Vh^{\dagger} + \Phi\ 2V.$$

Εδώ το V είναι $^{+}$ η τοπική γραμμή που επιλέγεται από την οικογένεια CM, η οποία δεν συμφωνεί με κανέναν από τους δύο καθολικούς χαρακτήρες που προστίθενται f . Η ισορροπημένη συνθήκη στο p είναι ο πυρήνας της προβολής στο H1 (Qp, V/F2V). Η αντικατάσταση του F δίνει τη συνθήκη G +. Για καθολική συνομολογία χρησιμοποιούμε το H1 (QΣ/Q, V), όπου το Σ περιέχει το p, το άπειρο και τους πρώτους αριθμούς του ήπιου επιπέδου, όπως στο [AOPR26, §5.3].

Στο πλαίσιο του [AOPR26, Πρόταση 5.14], ο τοπικός υπολογισμός τοποθετεί το BFwt στο H1 G +, και στη συνέχεια το Πόρισμα 5.19 της παρ. μνείας το συγκρίνει με την διαγώνια κλάση και αποδεικνύει ότι είναι ισορροπημένο. Επομένως, για τη δήλωση στις οικογένειες, η υπόθεση πρώτου βαθμού αφορά αυτήν την διευρυμένη ομάδα Selmer. Σε μια σταθερή κλασική εξειδίκευση, το [AOPR26, Πόρισμα 5.25] δίνει μια παραλλαγή· στην οριακή της περίπτωση ℓ0 = 2, m0 = 1, η πρόσθετη συνθήκη είναι agβh≠ 1.

Οι ολοκληρωτικές κατασκευές του [AOPR26, Υποθέσεις 4.1, 4.10 και 5.1] απαιτούν τα g και h να είναι υπολειμματικά μη αναγώγιμα και p-διακριτά. Στο δεύτερο ακανόνιστο σημείο Eisenstein, υποθέτουμε αντ' αυτού ότι οι κλάσεις, οι τοπικοί χάρτες και οι νόμοι αμοιβαιότητας επεκτείνονται στην χαρακτηριστική μηδενική μας υλοποίηση, με την κανονικότητα στο xh που ορίζεται στην §8.1. Αυτή η επέκταση είναι η πρόσθετη είσοδος που απαιτείται για την εφαρμογή του ορίσματος του [AOPR26] στη διπλή εξειδίκευση.

Χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση Atkin-Lehner του [AOPR26, §4.1]: λNg (g) παρεμβάλλει τα βαθμωτά ορίζεται από τη μορφή WNg gy = λNg (gy)g σε κρυσταλλικά σημεία του φλεβοκομβικού πόρου, όπου g_y^* είναι η συζυγής ιδιο- . Παρατηρήστε ότι αυτός ο παράγοντας είναι διαφορετικός από το ιδανικό συνοχής που χρησιμοποιείται για την ομαλοποίηση του χάρτη Perrin-Riou. Στη βάση CM του [AOPR26, §2.4], βάλτε v = (vf,1 + vf,εK)/2. Η $^{+}_{\text{περίοδος}}$ είναι

$$\Omega f = 2 \quad v\,f\,,\ {}^{+}_{\omega f}\,f \quad L \times\,, \text{ όπου } \omega f$$

είναι το εξειδικευμένο διαφορικό de Rham και , f είναι το συνομολογικό ζεύγος που χρησιμοποιείται στον νόμο της αμοιβαιότητας· αυτό είναι [AOPR26, Ορισμός 5.16]. Η αλλαγή της βάσης CM αλλάζει την περίοδο συμβατά.

Machine Translated by Google

Πρόταση 8.2 (Πρώτη εκφύλιση). Υποθέστε την κατασκευή χαρακτηριστικού-μηδενός, τις τοπικές συνθήκες και τους νόμους αμοιβαιότητας που αναφέρονται παραπάνω, και υποθέστε ότι το H1 G +(Q, V) RK έχει διάσταση ένα. Υποθέστε επιπλέον ότι

$$L_{\pi}(f, g, h) \neq 0.$$

Τότε η BFwt(f, g, h) ικανοποιεί τις ισορροπημένες τοπικές συνθήκες ως προς το , και

K (8.2) $$\lambda_{Ng}(g)\, BFwt(f, g, h) = \Omega_f\, L_g(f, g, h)\, \kappa(f, g, h). \quad \pi$$

Εδώ, το λNg (g) είναι η ψευδο-ιδιοτιμή Atkin-Lehner που μόλις ορίστηκε, και το Ωf είναι η p-αδική περίοδος που καθορίζεται από την επιλογή των vf,1 και vf,εK .

Απόδειξη. Οι νόμοι αναλυτικής παραγοντοποίησης και αμοιβαιότητας προσδιορίζουν τις δύο τιμές του ρυθμιστή. Και οι δύο κλάσεις βρίσκονται στη διευρυμένη ομάδα Selmer, όπου ο ρυθμιστής είναι μη μηδενικός και επομένως ενέσιμος στο πεδίο κλάσματος. Συνεπώς, συμφωνούν και η σταθμισμένη κλάση είναι ισορροπημένη επειδή η διαγώνια κλάση είναι.

8.3. Από τις κλάσεις Beilinson–Flach στις κλάσεις Beilinson–Kato. Στη συνέχεια, εξειδικεύουμε το h στο xh, αντιμετωπίζοντας ξεχωριστά τις δύο συνιστώσες Beilinson–Flach. Για κάθε i {1, εK}, έστω H1 (Q, V † H1 (Q, V † κKato i,2

$$_{i,1}^{\text{Κάτω κ}} \quad _{i,1}), \qquad _{i,2})$$

είναι οι κλάσεις Beilinson–Kato που συνδέονται με τα δύο στοιχεία χαρακτήρων του Vh. Συγκεκριμένα, αυτές είναι κλάσεις Kato για το g που έχουν συστραφεί από τους χαρακτήρες που καθορίζονται από τα i και ψj .

Έστω Mi,1 και Mi,2 οι δύο p-αδικές L-συναρτήσεις Mazur-Kitagawa που προκύπτουν από την Εξειδίκευση Eisenstein της συνάρτησης Hida-Rankin L HR . Έτσι

(8.3) $$^{\text{μεγάλο}}_{xh} = \text{Ει}\, M_{\iota,1} M_{\iota,2}, \qquad i \{1, \varepsilon K\},$$

όπου Ei είναι ο αντίστοιχος ρητός παράγοντας κανονικοποίησης. Υπάρχουν τώρα τέσσερις παράγοντες Mazur-Kitagawa, που δεικτοδοτούνται από (i, j).

Ορισμός 8.3. Για i {1, εK}, ορίστε την σταθμισμένη κλάση Beilinson–Kato

$$BKwt(g, h) = v_{h,1} \quad M_{i,2}\, \kappa \quad _{i,1}^{\text{Κάτω}} + v_{h,2} \quad M_{i,1}\, \kappa \quad _{i,2}^{\text{Κάτω}}.$$

Οι νόμοι αμοιβαιότητας του Kato στέλνουν και τις δύο σταθμισμένες συνιστώσες στο Mi,1Mi,2. Για να συγκρίνουμε τις κλάσεις συνολικά, ελέγχουμε πρώτα ότι η σταθμισμένη κλάση έχει μηδενική εικόνα στο συνηθισμένο τοπικό πηλίκο.

Για i {1, εK}, έστω Di η τοπική (φ, Γ)-ενότητα του V † , και έστω Dg και Dh είναι αυτά του $_{xh}$ οι δύο παράγοντες. Η ισορροπημένη συνθήκη είναι ο πυρήνας του

$$H^1(Q_p, D_i) \quad H^1(Q_p, Q_i), \qquad \dagger\ Q_i = (D \quad)\ _{\text{σοβ}} D \quad hi .$$

Ο δείκτης i περιλαμβάνει την ανατροπή χαρακτήρα από την πρώτη εξειδίκευση και ο † περιλαμβάνει την σταθερή αυτοδυϊκή ανατροπή. Ισοδύναμα, η επιτρεπόμενη τοπική υπομονάδα είναι (D Γράψτε $^{+}_{\text{σολ}}$ Dh + Dg D $^{+}_{\omega}$ $)^{\dagger}_{\text{εγώ}}$. Si για την προκύπτουσα καθολική μονάδα Selmer, χρησιμοποιώντας τις ίδιες ήπιες τοπικές συνθήκες και για τα δύο συστήματα Euler. Η οικογενειακή κλάση Beilinson-Flach ικανοποιεί αυτήν την ισορροπημένη συνθήκη και η κανονική εξειδίκευση του τοπικού φιλτραρίσματος διατηρεί τη μηδενική τιμή στο πηλίκο.

Για την σταθμισμένη κλάση Kato, ο μηχανισμός είναι αυτός στο [BDV22, απόδειξη του Θεωρήματος 4.2] και Στην CM υλοποίησή του, τα καθολικά διανύσματα χαρακτήρων έχουν τη μορφή vh,1 = v h · βλέπε ό.π., εξισώσεις (23)– $^{+}_{\omega}$ + v h vh,2 = v^{+}_{h} v (24). Εξ ου και η προβολή στο D των δύο συντεταγμένων. Έστω xi,j H1 (Qp, Qi) την εικόνα ω παίρνει τη διαφορά συνηθισμένου πηλίκου της j-οστής κλάσης Kato, μετά από αυτές τις ταυτοποιήσεις. Με τις περιόδους Kato σταθερές συμβατά, ο νόμος αμοιβαιότητας βαθμού ένα είναι

$$Col_i(x_{i,j}) = M_{i,j} .$$

Machine Translated by Google

Για ένα γενικό h, υποθέτουμε αυτήν την περιγραφή του συνηθισμένου πηλίκου, με τις δύο συντεταγμένες Kato και τους νόμους αμοιβαιότητάς τους κανονικοποιημένους όπως παραπάνω. Η ακόλουθη πρόταση χρησιμοποιεί αυτήν την τοπική συμβατότητα επιπλέον της p-ανωμαλίας.

Γράψτε Ai και Ωh,i για τους μη μηδενικούς παράγοντες που παρέχονται από τους νόμους αμοιβαιότητας στην κανονικοποίηση της (8.3), καταγράφοντας τους παράγοντες Euler και ισοδυναμίας (συμπεριλαμβανομένου του παράγοντα Ei της (8.3)) και τη σύγκριση των περιόδων ρυθμιστή, αντίστοιχα.

Πρόταση 8.4 (Σύγκριση Beilinson–Flach–Kato). Διορθώστε το i {1, εΚ}. Υποθέστε την κανονική εξειδίκευση και την τοπική συμβατότητα που αναφέρονται παραπάνω, καθώς και τις ήπιες τοπικές συνθήκες για τις κλάσεις Kato.

Αν το H1 (Qp, Qi) είναι απαλλαγμένο από στρέψη βαθμού ένα και Coli/= 0, τότε

$$^{\text{BKwt}\,(g,\,h)} \quad \text{Si} \,.\, i$$

Εάν, επιπλέον, ο καθολικός ρυθμιστής στο Si Rf,h Kf,h είναι αμφιμονοσήμαντος και οι δύο νόμοι αμοιβαιότητας μόλις ορίσατε την κανονικοποίηση, τότε

(8.4) $$\text{Ai BKwt}\,(g, h) = \Omega h,i \kappa \quad ^{\text{Μπλαν}\zeta\text{άω}}_{\cdots} \quad xh$$

πάνω από Kf,h.

Απόδειξη. Η προβολή της σταθμισμένης κλάσης Kato στο τοπικό πηλίκο είναι

$$\text{Mi},2\text{xi},1 \quad \text{Mi},1\text{xi},2.$$

Η εικόνα Coleman είναι Mi,2Mi,1 Mi,1Mi,2 = 0, και επειδή μια μη μηδενική απεικόνιση από μια ενότητα κατάταξης ένα χωρίς στρέψη σε ένα πεδίο ορισμού είναι ενέσιμη, η ίδια η κλάση πηλίκου μηδενίζεται. Μαζί με τις ήπιες τοπικές συνθήκες, αυτό αποδεικνύει ότι η κλάση ανήκει στο Si .

Και οι δύο κλάσεις στην (8.4) βρίσκονται τώρα στην ίδια ενότητα Selmer. Οι νόμοι αμοιβαιότητάς τους και η (8.3) δίνουν την ίδια εικόνα ρυθμιστή μετά τον πολλαπλασιασμό με Ai και Ωh,i, αντίστοιχα. Η καθολική ενέσιμη ικανότητα αποδεικνύει την ισότητα. Ισχύει επίσης πριν από τον εντοπισμό κάθε φορά που και οι δύο πλευρές βρίσκονται στην ίδια ενότητα χωρίς στρέψη.

Μια επαρκής συνθήκη για την καθολική ενέσιμη ικανότητα είναι το Si να είναι απαλλαγμένο από στρέψη τάξης ένα και ο ρυθμιστής του να είναι μη μηδενικός. Στην περίπτωση CM, [BDV22, Πρόταση 4.1 και Θεώρημα 4.2] λαμβάνουν τη σύγκριση από την εξαφάνιση μιας αυστηρά κυκλοτομικής ομάδας Selmer. Αντιμετωπίζουν h = E1(1, εKh) ord, όπου Kh είναι το φανταστικό τετραγωνικό πεδίο της δεύτερης οικογένειας CM, και οι υποθέσεις τους περιόδου Ωh,γ = 2 v $\overset{+}{h}$, ωhh είναι η CM περίπτωση του Ωh,i· βλέπε [BDV22, εξίσωση (25)]. Τους καλύπτουν ζυγού βάρους κυψελιδικές μορφές τετριμμένου νεβεντύπου, p-ημισταθερό αγωγό, και μια p-κανονική βελτίωση κλίσης μικρότερης από το βάρος μείον ένα, με Kh περιττής διακριτικής και όλους τους πρώτους να διαιρούν το p και το ήμερο επίπεδο να διαιρείται στο Kh, υπό την προϋπόθεση της μη εξαίρεσης. Για να εφαρμοστεί αυτό το αποτέλεσμα και στις δύο συνιστώσες, αυτές οι υποθέσεις πρέπει να ισχύουν και για τις δύο κυψελιδικές στρέψεις. Η σύγκριση σε οικογένειες απαιτεί επίσης την κανονικότητα των κλάσεων και τα τοπικά φιλτραρίσματα στην εξειδίκευση που υποτέθηκαν παραπάνω.

Όπως και στο [AOPR26, Λήμμα 5.9 και Προτάσεις 5.10, 5.14], η τοπική ακύρωση αφορά την σταθμισμένη κλάση, της οποίας τα μεμονωμένα στοιχεία Kato μπορεί να έχουν μη μηδενικές εικόνες συνηθισμένου πηλίκου. Για μη-CM h, η τοπική συμβατότητα και η καθολική ενέσιμη φύση στην Πρόταση 8.4 παραμένουν υποθέσεις.

Διατηρούμε τις περιόδους ανά συνιστώσα μέχρι να ομαλοποιηθούν και οι δύο συγκρίσεις. Για να διατυπώσουμε τον τύπο διπλής εκφύλισης με κοινούς παράγοντες, υποθέτουμε επιπλέον ότι οι δύο συγκρίσεις έχουν συμβατές ομαλοποιήσεις:

(8.5) $$\text{A1} = \text{A}\varepsilon\text{K} = \text{Ah}, \qquad \Omega h,1 = \Omega h,\varepsilon K = \Omega h.$$

Αν δεν επιβληθεί η (8.5), μπορεί κανείς αντ' αυτού να απορροφήσει το Ai/Ωh,i στον ορισμό της i-οστής συνιστώσας της διπλά σταθμισμένης κλάσης παρακάτω.

Machine Translated by Google

Ορισμός 8.5. Υποθέστε πρώτα ότι έχει επιλεγεί η συμβατή κανονικοποίηση (8.5). Η διπλά σταθμισμένη κλάση Beilinson–Kato είναι

$$\mathrm{BK}(2)(f,g,h) = v_{f,1}\ L_{\text{Αιθέριο Συνεργατικό}}\ \mathrm{BKwt}_{1}(g,h)\,\varepsilon_K\,x_h + v_{f,\varepsilon_K}\ L_{\text{Αιθέριο Συνεργατικό}}\ {}_{1}\ {}_{x_h}\ \mathrm{BKwt}_{\varepsilon_K}(g,h). \tag{8.6}$$

Χωρίς την (8.5), η κανονικοποιημένη έκδοση προκύπτει αντικαθιστώντας το $\mathrm{BK}\underset{\sim}{\mathrm{wt}}$ με το $(A_i/\Omega_{h,i})\,\mathrm{BKwt}$ (8.6). σε

Η επέκταση (8.6) εμφανίζει τα τέσσερα στοιχεία Kato που δημιουργήθηκαν από τις δύο διαδοχικές εξειδικεύσεις Eisenstein:

$$\begin{aligned}\mathrm{BK}(2)(f,g,h) = {} & v_{f,1}\ v_{h,1}\ L_{\text{Αιθέριο Συνεργατικό}}\ {}_{\varepsilon_K\,x_h}\ M_{1,2}\,\kappa^{\text{Κάτω}}_{1,1} \\ & + v_{f,1}\ v_{h,2}\ L_{\text{Αιθέριο Συνεργατικό}}\ {}_{\varepsilon_K\,x_h}\ M_{1,1}\,\kappa^{\text{Κάτω}}_{1,2} \\ & + v_{f,\varepsilon_K}\ v_{h,1}\ L_{\text{Αιθέριο Συνεργατικό}}\ {}_{1}\ {}_{x_h}\ M_{\varepsilon_K,2}\,\kappa^{\text{Κάτω}}_{\varepsilon_K,1} \\ & + v_{f,\varepsilon_K}\ v_{h,2}\ L_{\text{Αιθέριο Συνεργατικό}}\ {}_{1}\ {}_{x_h}\ M_{\varepsilon_K,1}\,\kappa^{\text{Κάτω}}_{\varepsilon_K,2}\,.\end{aligned}$$

Τα βάρη Hida-Rankin προέρχονται από την εξειδίκευση στο f, και τα βάρη Mazur-Kitagawa από αυτήν στο h.

Πρόταση 8.6 (Δεύτερη εκφύλιση). Σύμφωνα με τις υποθέσεις της Πρότασης 8.4 τόσο για i = 1 όσο και για i = εK, και την συμβατή κανονικοποίηση (8.5), έχουμε

$$A_h\,\mathrm{BK}(2)(f,g,h) = \Omega_h\,\mathrm{BFwt}(f,g,h)\ {}_{x_h}. \tag{8.7}$$

Συγκεκριμένα, η διπλά σταθμισμένη κλάση Beilinson-Kato ικανοποιεί τις ίδιες ισορροπημένες τοπικές συνθήκες όπως η εξειδίκευση της σταθμισμένης κλάσης Beilinson-Flach.

Απόδειξη. Εφαρμόστε την (8.4) στους δύο όρους του Ορισμού 8.5. Δεδομένου ότι τα εξωτερικά βάρη Hida–Rankin παραμένουν αμετάβλητα κατά τη σύγκριση ανά συνιστώσα, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}A_h\,\mathrm{BK}(2)(f,g,h) = {} & \Omega_h v_{f,1}\ L_{\text{Αιθέριο Συνεργατικό}}\ {}_{\varepsilon_K\,x_h}\ \kappa^{\mathrm{BF}}_{1\ x_h} \\ & + \Omega_h v_{f,\varepsilon_K}\ L_{\text{Αιθέριο Συνεργατικό}}\ {}_{1}\ {}_{x_h}\ \kappa^{\mathrm{BF}}_{\varepsilon_K\,x_h},\end{aligned}$$

που είναι ακριβώς το δεξί μέλος της (8.7). Ο ισχυρισμός σχετικά με τις τοπικές συνθήκες προκύπτει από τον αντίστοιχο ισχυρισμό για την σταθμισμένη κλάση Beilinson-Flach.

8.4. Ο τύπος διπλής εκφύλισης. Ο συνδυασμός των Προτάσεων 8.2 και 8.6 δίνει το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 8.7 (Διπλή εκφύλιση Eisenstein). Υποθέστε τις υποθέσεις της Πρότασης 8.2 και της Πρότασης 8.4 τόσο για i = 1 όσο και για i = εK. Υποθέστε ότι οι κλάσεις και οι παράγοντες σύγκρισης ειδικεύονται τακτικά στο xh όπως ορίζεται στην §8.1, και επιλέξτε την κοινή κανονικοποίηση (8.5). Στη συνέχεια.

$$\lambda_{N_g}(g)\,A_h\,\mathrm{BK}(2)(f,g,h) = \Omega_f\Omega_h\,L_g(f,g,h)\,\kappa_{\mathrm{Ii}}(f,g,h). \tag{8.8}$$

Εδώ όλες οι κλάσεις και οι συναρτήσεις περιορίζονται στον κοινό τόπο εξειδίκευσης που καθορίζεται από τα xf και xh.

Απόδειξη. Η εξειδίκευση της (8.2) στο xh

$$\text{δίνει } \lambda_{N_g}(g)\,\mathrm{BFwt}(f,g,h)\ {}_{x_h} = \Omega_f\,L_g(f_{\mathrm{Ii}},g,h)\,\kappa(f,g,h).$$

Πολλαπλασιάζοντας με Ωh και χρησιμοποιώντας την (8.7) προκύπτει η (8.8).

Machine Translated by Google

Παρατήρηση 8.8. Εάν οι κανονικοποιήσεις που χρησιμοποιούνται στις δύο συγκρίσεις ταυτοποιούν τα Ωf και Ωh με μία μόνο περίοδο Ωf,γ, τότε το δεξί μέλος της (8.8) μπορεί να γραφτεί ως

$$\sum_{(f,g,h)} \kappa(f,g,h).\,\Omega_{f,\gamma}^{2}$$

Διατηρούμε το ΩfΩh μέχρι να ελεγχθεί αυτή η συμβατότητα από τους τύπους παρεμβολής, έτσι ώστε κάθε περίοδος να καταγράφει τη δική της εξειδίκευση Eisenstein.

8.5. Σύγκριση με την εικόνα σημείου Heegner. Η κατασκευή του [BSV22a] χρησιμοποιεί δύο εξειδικεύσεις βάρους-ένα, σε κανονικές σειρές θ, για να συσχετίσει τους διαγώνιους κύκλους με τις κλάσεις Heegner. Οι ακανόνιστες εξειδικεύσεις Eisenstein δίνουν αντ' αυτού αναγώγιμες ίνες, των οποίων τα συστατικά στοιχεία του χαρακτήρα σταθμίζονται από τις αναλυτικές παραγοντοποιήσεις.

Η σύνδεση με τα σημεία Heegner στη σύγκρισή μας προέρχεται από τις κλάσεις Beilinson-Flach του [BDV22]: όπως στην Ενότητα 7, τα βάρη επιβάλλουν την τοπική συνθήκη και η αμοιβαιότητα δίνει την καθολική σύγκριση.

Παρατήρηση 8.9. Οι δύο διαδρομές που αναφέρθηκαν στην αρχή της ενότητας έχουν διαφορετικούς περιορισμούς ισοτιμίας. Η διαγώνια κατασκευή χρησιμοποιεί την αυτοδυϊκή συστροφή με 2t = k + ℓ + m (βλ. [AOPR26, §4.2]). Στα βάρη (1, ℓ, 1), το υπόλοιπο κλασικό βάρος ℓ είναι άρτιο. Μια περαιτέρω εξειδίκευση στο (1, 1, 1) είναι επομένως εκτός αυτού του κλασικού εύρους ισοτιμίας και δεν δίνει σύγκριση διαγώνιων προς κυκλικές μονάδες στην ίδια κατασκευή.

Για τις κλάσεις Beilinson-Flach, μπορεί κανείς να ρωτήσει σχετικά με την εξειδίκευση και των δύο αρθρωτών μεταβλητών σε βάρος ένα, διατηρώντας παράλληλα την κυκλοτομική μεταβλητή. Αυτό δεν αποτελεί εφαρμογή του [BDV22, Θεωρήματος 4.2], όπου η υπόλοιπη κυστειδική μορφή έχει άρτιο βάρος τουλάχιστον δύο. Μια τέτοια σύγκριση θα απαιτούσε τακτική συνέχιση των κλάσεων και των τοπικών χαρτών στο δεύτερο σημείο Eisenstein, ακολουθούμενη από μια σύγκριση Kato-κυκλικής μονάδας στην κατάλληλη υλοποίηση. Συγκεκριμένα, το σημείο CM E1(1, εK) έχει συνήθη ιδιοτιμή 1 και βρίσκεται εκτός των μη εξαιρούμενων υποθέσεων της Ενότητας 5.

Αναφορές

[AOPR26] Ra´ul Alonso, Lois Omil-Pazos, και Oscar Rivero, Αντικυκλοτομικές διαγώνιες τάξεις και στοιχεία Beilinson-Flach, Int. Math. Res. Not. IMRN (2026), αρ. 20, Paper Not. rnag236. 5, 43, 44, 46, 48, 50

[BB22] Denis Benois και K^azım B¨uy¨ukboduk, Interpolation of Beilinson–Kato στοιχεία και p-adic L-functions, Ann. Μαθηματικά. E. 46 (2022), αρ. 2, 231–287. MR 4493258 22 Jo¨el Bella¨ıche and

[BC06] Ga¨etan Chenevier, Lissit´e de la courbe de Hecke de GL2 aux points Eisenstein critiques, J. Inst. Μαθηματικά. Jussieu 5 (2006), αρ. 2, 333–349. 13 [BCD+14] Massimo Bertolini,

Francesc Castella, Henri Darmon, Samit Dasgupta, Kartik Prasanna και Victor Rotger, p-adic L-functions and Euler systems: a tale in two trilogies, Automorphic forms and Galois παραστάσεις. Τομ. 1, London Math. Σημειώσεις Διαλέξεων Κοινωνικής Διδασκαλίας, τόμος 414, Cambridge Univ. Press, 2014, σελ. 52–101. MR 3444223 16, 39 [BD14] Massimo Bertolini και Henri Darmon, Το

σύστημα Euler του Kato και τα λογικά σημεία σε ελλειπτικές καμπύλες I: ένας p-αδικός τύπος Beilinson, Israel J. Math. 199 (2014), αρ. 1, 163–188. MR 3219532 19 Joel Bella'iche και Samit Dasgupta, Οι p-αδικές L-συναρτήσεις

[BD15] της κακής σειράς Eisenstein, Compos. Math. 151 (2015), αρ. 6, 999–1040. 2 Joel Bella'iche και Mladen Dimitrov, Σχετικά με την ιδιοκαμπύλη σε

[BD16] κλασικό βάρος 1 μονάδα, Duke Math. J. 165 (2016), αρ. 2, 245–266. MR 3457673 7 [BDP12] Massimo Bertolini, Henri Darmon και Kartik Prasanna, p-adic Rankin L-

series και ορθολογικά σημεία

σε ελλειπτικές καμπύλες CM, Pacific J. Math. 260 (2012), αρ. 2, 261–303. MR 3001796 38

[BDP22] Adel Betina, Mladen Dimitrov και Alice Pozzi, Σχετικά με την αποτυχία του Gorensteinness στο βάρος 1 σημεία Eisenstein της ιδιοκαμπύλης, Amer. J. Math. 144 (2022), αρ. 1, 227–265. MR 4367418 2, 7, 8, 14, 24, 26, 29 [BDV22] Massimo Bertolini,

Henri Darmon, and Rodolfo Venerucci, Heegner points and Beilinson–Kato στοιχεία: μια εικασία του Perrin-Riou, Adv. Μαθηματικά. 398 (2022), Αρ. Εργασίας 108172, 50. MR 4379203 5, 7, 12, 14, 15, 21, 44, 47, 48, 50 Joel Bellaiche, Κρίσιμες p-αδικές L-συναρτήσεις,

[Bel12] Invent. Math. 189 (2012), αρ. 1, 1–60. MR 2929082 13

Machine Translated by Google

[Bel21] Joel Bellaiche, Το ιδιοβιβλίο—ιδιοποικιλίες, οικογένειες αναπαραστάσεων Galois, p-αδικές L-συναρτήσεις, Διαδρομές στα Μαθηματικά, Birkh¨auser/Springer, Cham, [2021] ©2021. MR 4306639 8

[Bru67] Armand Brumer, Σχετικά με τις μονάδες των αλγεβρικών αριθμητικών πεδίων, Mathematika 14 (1967), αρ. 2, 121–124. 18

[BSV22a] Massimo Bertolini, Marco Adamo Seveso, και Rodolfo Venerucci, Ισορροπημένες διαγώνιες κλάσεις και λογικά σημεία σε ελλειπτικές καμπύλες, Ast´erisque (2022), αρ. 434, 175–201, Σημεία Heegner, Stark-Heegner σημεία και διαγώνιες κλάσεις. MR 4489474 50

[BSV22b] _____ , Νόμοι αμοιβαιότητας για ισορροπημένες διαγώνιες τάξεις, Ast´erisque (2022), αρ. 434, 77–174, Heegner σημεία, σημεία Stark-Heegner και διαγώνιες κλάσεις. MR 4489473 7

[CD23] Francesc Castella και Kim Tuan Do, Διαγώνιοι κύκλοι και αντικυκλοτομική θεωρία Iwasawa της modular έντυπα, προεκτύπωση, arXiv:2303.06751, 2023. 5

[Das16] Samit Dasgupta, Παραγοντοποίηση της p-αδικής σειράς L του Rankin, Invent. Math. 205 (2016), αρ. 1, 221–268. ΚΥΡΙΟΣ 3514962 2, 19

[DLR17] Henri Darmon, Alan Lauder και Victor Rotger, Παραμορφώσεις p-αδικής πρώτης τάξης βάρους ένα νέες φόρμες, συναρτήσεις L και αυτομορφικές μορφές (Jan Hendrik Bruinier and Winfried Kohnen, εκδ.), Συνεισφορές στις Μαθηματικές και Υπολογιστικές Επιστήμες, τόμος 10, Springer, Cham, 2017, σελ. 39–80. 3

[FK24] Takako Fukaya και Kazuya Kato, Σχετικά με τις εικασίες του Sharifi, Kyoto J. Math. 64 (2024), αρ. 2, 277–420. 11, 21, 24

[Hid16] Haruzo Hida, Αριθμητική των συζυγών L-τιμών, p-αδικές πτυχές των αρθρωτών μορφών, World Sci. Publ., Χάκενσακ, Νιου Τζέρσεϊ, 2016, σελ. 185–236. MR 3587958 8

[JLZ21] Dimitar Jetchev, David Loeffler, και Sarah Livia Zerbes, σημεία Heegner στις οικογένειες Coleman, Πρακτικά. Λονδίνο. Μαθηματικών. Εταιρεία 122 (2021), αρ. 1, 124–152. MR 4210260 4, 38, 39, 40

[Κατ76] Nicholas M. Katz, p-adic παρεμβολή πραγματικών αναλυτικών σειρών Eisenstein, Ann. of Math. (2) 104 (1976), αρ. 3, 459–571. MR 0506271 38

[Kat04] Kazuya Kato, p-adic θεωρία Hodge και τιμές συναρτήσεων ζήτα αρθρωτών μορφών, Ast´erisque (2004), Όχι. 295, ix, 117–290, Cohomologies p-adiques et applications arithm´etiques. III. 22, 39

[LR24] David Loeffler και Oscar Rivero, Εκφυλισμός Eisenstein των συστημάτων Euler, J. Reine Angew. Μαθηματικά. 814 (2024), 241–282. MR 4793345 4, 6, 13, 37, 38, 39, 40, 41, 44

[LZ14] David Loeffler και Sarah Livia Zerbes, Θεωρία Iwasawa και p-αδικές L-συναρτήσεις πάνω από $\mathbb{Z}_p^2$-επεκτάσεις, Διεθνές Περιοδικό Θεωρίας Αριθμών 10 (2014), αρ. 8, 2045–2096. MR 3273476 39

[Och03] Tadashi Ochiai, Γενίκευση του χάρτη Coleman για παραμορφώσεις Hida, Amer. J. Math. 125 (2003), αρ. 4, 849–892. MR 1993743 22

[Oht99] Masami Ohta, Συνηθισμένες ομάδες συνομολογίας p-adic 'etale συνδεδεμένες με πύργους ελλειπτικών αρθρωτών καμπυλών, Σύνθεση Μαθηματικών 115 (1999), αρ. 3, 241–301. 25

[Θέση19] Άλις Πότσι, Η ιδιοκαμπύλη στα σημεία Weight One Eisenstein, διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο McGill, Μόντρεαλ, 2019. MR 4197785 14

[PR25] Javier Polo και Oscar Rivero, Εκφυλισμός Eisenstein των τάξεων Beilinson-Kato και των κυκλικών μονάδων, Με παράρτημα του Ju-Feng Wu, arXiv:2501.01514v3, 2025. 3, 4, 6, 13, 15, 16, 19, 20, 22, 33, 37

[RR19] Oscar Rivero και Victor Rotger, στοιχεία Beilinson–Flach, μονάδες Stark και p-adic επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα, Φόρουμ Μαθηματικών. 31 (2019), αρ. 6, 1517–1531. 3

[RR24] Oscar Rivero and Victor Rotger, (2024), αρ. Μοτίβικές συσχετίσεις και η εικασία του Sharifi, Amer. J. Math. 146 6, 1691–1721. 9, 10, 12, 18

[Sha11] Romyar T. Sharifi, Ένας χάρτης αμοιβαιότητας και η δύο μεταβλητών p-αδική L-συνάρτηση, Ann. of Math. (2) 173 (2011), αρ. 1, 251–300. 11, 25

[Στέ82] Glenn Stevens, Αριθμητική σε αρθρωτές καμπύλες, Progress in Mathematics, τόμος 20, Birkhauser Boston, Α.Ε., Βοστώνη, Μασαχουσέτη, 1982. 11

[SW21] Sheng-Chi Shih και Jun Wang, Σχετικά με την εικασία του Sharifi: εξαιρετική περίπτωση, Trans. Amer. Math. Soc. 374 (2021), αρ. 12, 8531–8546. 2, 7, 20, 24, 28, 29, 35

[SW22] _____ , Σχετικά με τις αναλλοίωτες Iwasawa των αρθρωτών μορφών με αναγώγιμο και μη p-διακριτό υπόλοιπο Αναπαραστάσεις Galois, arXiv:2206.14636v2, 2022. 2, 18, 24, 25, 26, 29, 30

JP: Departamento de Matematicas (Universidade de Santiago de Compostela), Santiago de Κομποστέλα, Ισπανία

Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: javier.polo.noche@rai.usc.es

Ή: CITMAga και Departamento de Matematicas, Universidade de Santiago de Compostela, Σαντιάγο ντε Κομποστέλα, Ισπανία

Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: oscar.rivero@usc.es